

Περιεχόμενα

8	Διαστατική Ανάλυση και Ομοιότητα	1
8.1	Εισαγωγή	1
8.2	Κλίμακες και παράμετροι ομοιότητας	2
8.3	Διαστατική ομοιογένεια και θεώρημα <i>Buckingham</i>	7
8.4	Παραδείγματα Διαστατικής ανάλυσης	9
8.4.1	Οριακή ταχύτητα σε ιξωδικό ρευστό	9
8.4.2	Δύναμη αντίστασης σε βυθισμένο σώμα σε οριζόντια κίνηση	12
8.4.3	Δύναμη ανύψωσης πτερυγίου	13
8.5	Μοντελοποίηση και ομοιότητα	14
8.6	Σημαντικοί αδιάστατοι αριθμοί στην υδροδυναμική	17
8.6.1	Αδιάστατοι αριθμοί στην εξίσωση ενέργειας	21
8.7	Διαστατική ανάλυση της γενικευμένης ροής <i>Couette – Poiseuille</i> μεταξύ δύο πλακών	22
8.8	Ασκήσεις	25
8.9	<i>Navier – Stokes</i>	26

Κεφάλαιο 8

Διαστατική Ανάλυση και Ομοιότητα

8.1 Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια μελετήσαμε ροές σε ασυμπίεστα ρευστά με υψηλό βαθμό συμμετρίας όπου μπορούμε να έχουμε αναλυτικές λύσεις. Στα κεφάλαια 4 και 5 μάλιστα περιοριστήκαμε σε ανιζωδική ροή παραλείποντας τις ιζωδικές δυνάμεις στην εξίσωση ορμής. Για τον σκοπό αυτό εισάγαμε τον αριθμό *Reynolds* ως τον λόγο των αδρανειακών δυνάμεων προς τις ιζωδικές που δίνεται από την σχέση

$$\text{αριθμός } Reynolds = \frac{\text{αδρανειακή δύναμη}}{\text{ιζωδική δύναμη}} \longrightarrow Re = \frac{\rho u_0 L}{\mu}, \quad (8.1)$$

όπου L και u_0 είναι χαρακτηριστικά μήκος και ταχύτητα αντίστοιχα. Εάν ο αριθμός *Reynolds* είναι μεγάλος ($Re \gg 1$), αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να παραλείψουμε την ιζωδική δύναμη σε σχέση με την αδρανειακή δύναμη. Αυτό θα συμβεί αν¹

$$Re \equiv \frac{u_0 L}{\nu} \gg 1, \quad (8.2)$$

¹Την περιοχή $Re \gg 1$ μπορούμε να τη χωρίσουμε σε τμήματα με πολύ διαφορετική συμπεριφορά και μεταβατικά στάδια από την στρωτή ροή σε τυρβώδη ροή. Ο λόγος είναι ότι έχουμε πληθώρα φαινομένων που θα διαφανούν όταν μελετήσουμε αριθμητικά το σύνολο των υδροδυναμικών εξισώσεων διατήρησης μαζί με τους καταστατικούς νόμους που έχουν διαφορετική μορφή ανάλογα με τις υδροδυναμικές ή θερμοδυναμικές παραμέτρους. Αυτό επίσης μπορεί να διαπιστωθεί με εκτεταμένες πειραματικές μετρήσεις, που μετριάζονται όμως με την χρήση της διαστατικής ανάλυσης. Και οι δύο αυτές κατευθύνσεις δεν είναι στους στόχους του βιβλίου. Αποτελούν όμως κύριες δραστηριότητες της υδροδυναμικής. Το κριτήριο του αριθμού $Re \gg 1$ δεν ισχύει σε περιοχές στο χώρο όπου ο μεταφορικός αδρανειακός όρος είναι αμελητέος, $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \approx 0$, είτε λόγω συμμετρίας είτε λόγω της χωρικής μεταβολής του πεδίου ταχύτητας είτε είναι στάσιμα σημεία όπου μηδενίζεται το πεδίο ταχύτητας. Στα σημεία αυτά δημιουργούνται αστάθειες που μπορούν να επεκταθούν σε όλο τον όγκο του ρευστού με μεταβολή κάποιων σημαντικών παραμέτρων. Να θυμήσουμε το αντίθετο όριο της ερπυστικής ($Re \ll 1$) ροής γύρω από σφαίρα. Εκεί παραλείψαμε τον αδρανειακό όρο και βρήκαμε αναλυτικά τον νόμο *Stokes* για την δύναμη αντίστασης. Ασυμπτωτικά (μακριά από τη σφαίρα) όμως ο αδρανειακός όρος υπερτερεί ($\sim \frac{1}{r^2}$) σε σχέση με την ιζωδική δύναμη ($\sim \frac{1}{r^3}$). Η δύναμη όμως αντίστασης δίνεται από το πεδίο ταχύτητας και τον ταυνοστή τάσης κοντά στη σφαίρα, όπου υπερτερεί ο ιζωδικός όρος. Αυτό επιβεβαιώνεται και από πειραματικές μετρήσεις. Αύξηση του αριθμού *Reynolds* ($Re \geq 1$) απαιτεί να κράτησουμε τον αδρανειακό όρο έστω και στην προσέγγιση *Oseen* (δες Κεφ. 6).

όπου $\nu = \mu/\rho$ το κινητικό ιξώδες. Δηλαδή δεν είναι μόνο η ταχύτητα αλλά και το χαρακτηριστικό μήκος που παίζουν ρόλο, καθώς και ιδιότητες του ρευστού που θεωρήσαμε σταθερές και ανεξάρτητες από τις συνθήκες ροής και θερμοδυναμικής κατάστασης του ρευστού. Για να φτάσουμε σ' αυτό το συμπέρασμα ακολουθήσαμε την διαδικασία αδιαστατοποίησης της εξίσωσης ορμής, που θα μελετήσουμε πιά συστηματικά στο παρόν κεφάλαιο. Στο Κεφ. 6 εισάγαμε και τις ιξωδικές δυνάμεις αλλά στη συνέχεια περιοριστήκαμε στην ερπυστική ροή, δηλ. στο αντίθετο όριο με χαμηλό αριθμό *Reynolds*, ($Re \ll 1$). Χωρίς σημαντικές προσεγγίσεις, η μόνη διέξοδος θα ήταν η προσφυγή σε αριθμητικούς υπολογισμούς με ταυτόχρονη λύση των εξισώσεων που περιγράφουν τους νόμους διατήρησης (συνέχειας, ορμής, ενέργειας) και παίρνοντας υπόψη τους καταστατικούς νόμους για τις ιδιότητες του ρευστού. Μία πιά συνετή διαδικασία είναι η χρήση προσεγγιστικών μεθόδων, ακόμη και στην περίπτωση της αριθμητικής επίλυσης, όπως είναι οι τεχνικές της θεωρίας διαταραχών, που βασίζεται στην εκτίμηση της τάξης μεγέθους των διαφόρων όρων στις υδροδυναμικές εξισώσεις. Σ' αυτή την οικογένεια μεθόδων υπάγεται και η διαστατική ανάλυση της εξίσωσης ορμής που αναφέραμε προηγουμένως. Με τη μέθοδο αυτή έχουμε ένα συστηματικό τρόπο να εκτιμήσουμε τους μικρούς όρους σε μία εξίσωση και να οδηγηθούμε είτε σε αναλυτική λύση των απλοποιημένων εξισώσεων, είτε σε προσεγγιστικές αριθμητικές λύσεις.

Η διαδικασία που συχνά ακολουθούμε σε διάφορους κλάδους της φυσικής είναι να εντοπίσουμε τις σημαντικές κλίμακες (συχνά χώρου και χρόνου, αλλά όχι μόνο). Στη συνέχεια κανονικοποιούμε τις φυσικές ποσότητες σ' αυτές τις κλίμακες και έχουμε αδιάστατες ποσότητες

Η διαστατική ανάλυση είναι επίσης χρήσιμη για την ανάλυση πειραματικών δεδομένων, όπου έχουμε πολλές φυσικές παραμέτρους που επηρεάζουν τις μετρήσεις και επομένως απαιτούνται μετρήσεις μεταβάλλοντας κάθε μία παράμετρο αλλά κρατώντας τις άλλες σταθερές. Τα αποτελέσματα καταγράφονται με την μορφή πολλών διαγραμμάτων, που δεν μας βοηθούν να κατανοήσουμε τις σημαντικές ανταγωνιστικές 'δυνάμεις' που καθορίζουν τη ροή. Αντίθετα η διαστατική ανάλυση θα μας οδηγήσει σε 'αδιάστατους αριθμούς' που παίζουν σημαντικό ρόλο στην κατανόηση των σημαντικών επιδράσεων. Αυτοί καθορίζουν την ροή και όχι ξεχωριστά η κάθε γεωμετρική διάσταση (αντικειμένων στη ροή ή διαστάσεων περιορισμού ροής) ή οι φυσικές παράμετροι της ροής (πυκνότητα, ιξώδες επιφανειακή τάση κτλ.), ή άλλες μεταβλητές όπως είναι το πεδίο ταχύτητας και ροή θερμότητας. Με τους αδιάστατους αριθμούς μπορούμε να ξεχωρίσουμε περιοχές ευστάθειας και αστάθειας ή την μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή. Ταυτόχρονα απλοποιεί την πειραματική διαδικασία διότι απαιτούνται μετρήσεις μεταβάλλοντας μόνο τους αδιάστατους αριθμούς περιορίζοντας τον αριθμό των διαγραμμάτων,

Στη συνέχεια θα συστηματοποιήσουμε την διαδικασία της διαστατικής ανάλυσης βασιζόμενοι σε ένα βασικό θεώρημα του *Buckingham*, που μας δίνει τη δυνατότητα να κάνουμε το πρώτο σημαντικό βήμα στη διερεύνηση των σχέσεων μεταξύ φυσικών παραμέτρων. Βασικό συστατικό είναι η ιδιότητα της ομοιογένειας των βασικών νόμων αλλά και κάθε μαθηματικής σχέσης. Θα εισάγουμε επίσης την έννοια της δυναμικής ομοιότητας που είναι βασική για της μοντελοποίηση φυσικών φαινομένων και την διερεύνηση στο εργαστήριο με μοντέλλα μικρής κλίμακας. Πριν από αυτό όμως θα δόσουμε δύο απλά παραδείγματα σαν κίνητρο για να αποδεχθούμε τη φυσική διαδικασία της διαστατικής ανάλυσης, αλλά και να εκτιμήσουμε την απλοποίηση της πειραματικής διαδικασίας.

8.2 Κλίμακες και παράμετροι ομοιότητας

Τα πρώτα βήματα για την κατανόηση οιουδήποτε φυσικού φαινομένου είναι ο καθορισμός των σημαντικών μεταβλητών (γεωμετρικών, φυσικών και υδροδυναμικών) και στη συνέχεια η εύρεση και διατύπωση του φυσικού νόμου που συνδέει τις μεταβλητές αυτές. Για απλά φυσικά φαινόμενα αυτό είναι εύκολο από βασικές αρχές. Π.χ. για ένα απλό εκκρεμές μήκους l , μάζας m σε πεδίο

βαρύτητας g και χωρίς τριβή είναι εύκολο να βρούμε ότι η φυσική συχνότητα ταλάντωσης ω_0 δίνεται από τη σχέση

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (8.3)$$

Το αποτέλεσμα αυτό, που δεν εξαρτάται από τη μάζα του βαριδίου m μπορεί να εξαχθεί και από απλή εξέταση των μονάδων. Από τις τρεις σταθερές g , l και m , η μόνη ποσότητα με μονάδες συχνότητας είναι η $\sqrt{g/l}$. Εδώ υποθέτουμε ότι δεν ασκούνται άλλες δυνάμεις στο εκκρεμές πλήν της βαρύτητας (και φυσικά τη δύναμη στήριξης που δεν επηρεάζει την συχνότητα του εκκρεμούς). Η (8.3) εύκολα βγαίνει από την λύση της εξίσωσης του Νεύτωνα για μικρές αποκλίσεις από την κάθετο (σε γωνία θ),

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta. \quad (8.4)$$

Μπορεί όμως να την βρούμε χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση. Ο λόγος

$$\Pi = \frac{\omega_0}{\sqrt{g/l}}, \quad (8.5)$$

είναι ανεξάρτητος από την αλλαγή των μονάδων μέτρησης M , L , T (μάζας, μήκους, χρόνου) και ονομάζεται αδιάστατος αριθμός. Έτσι μπορούμε να γράψουμε²

$$\omega_0 = c\sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (8.6)$$

όπου c είναι μία σταθερά, άγνωστη προς το παρόν, και γι' αυτή χρειαζόμαστε επιπλέον πληροφορίες, π.χ. την εξίσωση (8.4).

Τα παρακάτω συνοψίζουν μερικά από τα σημαντικά χαρακτηριστικά της διαστατικής ανάλυσης, που είναι ένα δυνατό εργαλείο για να "ανακαλύπτει" σημαντικές σχέσεις, αλλά ταυτόχρονα αφήνει μία απροσδιοριστία:

α) Η συχνότητα ω_0 δεν εξαρτάται από τη μάζα. Αυτή είναι μία από τις εκπλήξεις και οφείλεται στο γεγονός ότι η δύναμη της βαρύτητας είναι ανάλογη της μάζας όπως και η αδρανειακή. Επίσης έχουμε μόνο μία σύνθετη ποσότητα με μονάδες συχνότητας. Εάν όμως έχουμε επιπλέον δυνάμεις είναι πιθανόν να έχουμε εξάρτηση από τη μάζα, όπως εύκολα διαπιστώνεται εάν προσθέσουμε και δύναμη τριβής. Αυτό προϋποθέτει ότι έχουμε μία νέα σύνθετη ποσότητα με μονάδες συχνότητας. Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε και απόσβεση.

β) Η σταθερά c δεν προσδιορίζεται μόνο από την διαστατική ανάλυση. Αυτό απαιτεί την λύση της εξίσωσης του Νεύτωνα, ή περιορισμούς από τη φυσική του προβλήματος, π.χ. ισότητα μέσης κινητικής και δυναμικής ενέργειας.

Εάν τώρα η μάζα του εκκρεμούς είναι κατανομημένη στο μήκος l , τότε εισέρχεται μία νέα ποσότητα, η ροπή αδράνειας I . Επειδή όμως οι μονάδες της αδράνειας είναι ML^2 , τότε η σταθερά

$$\Pi_2 = \frac{I}{ml^2} \quad (8.7)$$

είναι επίσης αδιάστατος αριθμός. Πάλι όμως η μόνη σύνθετη ποσότητα με μονάδες συχνότητας είναι η $\sqrt{\frac{g}{l}}$. Η διαστατική ανάλυση στην περίπτωση αυτή μας λέει ότι η συχνότητα ταλάντωσης είναι

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}\Phi(\Pi_2) \equiv \sqrt{\frac{g}{l}}\Phi\left(\frac{I}{ml^2}\right), \quad (8.8)$$

όπου $\Phi(\Pi_2)$ είναι μία συνάρτηση της αδιάστατης ποσότητας Π_2 , η αναλυτική μορφή της οποίας δεν μπορεί να προσδιοριστεί από διαστατική ανάλυση. Για τον σκοπό αυτό απαιτείται η ανάπτυξη

²Εδώ υποθέσαμε ότι το εκκρεμές (απλό) δεν έχει άλλα χαρακτηριστικά μήκη

μιας θεωρίας ή η θεώρηση της ακριβούς λύσης της εξίσωσης κίνησης. Εναλλακτικά μπορούμε να κάνουμε πειραματικές μετρήσεις μεταβάλλοντας τον αριθμό Π_2 μεταβάλλοντας π.χ. μόνο την κατανομή της μάζας στο μήκος l .

Στην περίπτωση ομοιογενούς κατανομής της μάζας στο μήκος l γνωρίζουμε ότι

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}, \quad (8.9)$$

με $I = ml^2/3$. Συγκρίνοντας την (8.8) με την (8.9) για την περίπτωση αυτή έχουμε

$$\omega_0 = \sqrt{3}\sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \Phi(\Pi_2) = \sqrt{3}. \quad (8.10)$$

Στον προηγούμενο υπολογισμό παραλείψαμε το γεγονός ότι η ράβδος έχει και πάχος, π.χ. μια κυλινδρική ράβδος με διάμετρο της κυκλικής βάσης d . Η σχέση για την συχνότητα γίνεται πιο πολύπλοκη, καθότι εισέρχεται ένα νέο μήκος, δηλ. η διάμετρος του κυλίνδρου d . Από φυσική διαίσθηση περιμένουμε ότι αν $\frac{d}{l} \ll 1$, τότε το αποτέλεσμα δεν πρέπει να διαφέρει σημαντικά από το προηγούμενο. Πάλι για ομογενή κατανομή έχουμε για τη ροπή αδρανείας

$$I = \frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2 \left\{1 + \frac{3}{8}\left(\frac{d}{l}\right)^2\right\}$$

και η συχνότητα ταλάντωσης μπορεί να γραφεί ως

$$\omega_0 = \sqrt{3}\sqrt{\frac{g}{l}} \left\{1 + \frac{3}{8}\left(\frac{d}{l}\right)^2\right\}^{-1/2}. \quad (8.11)$$

που για μικρό $\frac{d}{l} \ll 1$ μας δίνει την προηγούμενη σχέση. Έτσι εξαρτάται επίσης και από το λόγο $\frac{d}{l}$ που είναι ένας νέος αδιάστατος αριθμός. Η σχέση αυτή είναι ακριβής και ισχύει για οποιοδήποτε λόγο $\frac{d}{l}$, αλλά δεν μπορούμε να την βγάλουμε μόνο από διαστατική ανάλυση, εκτός αν γράψουμε την εξίσωση κίνησης του εκκρεμούς και υπολογίσουμε την ροπή αδρανείας για τον κύλινδρο, ή εναλλακτικά αν πειραματιστούμε για διαφορετικές τιμές του λόγου $\frac{d}{l}$. Είναι δηλ. λογικό να υποθέσουμε ότι

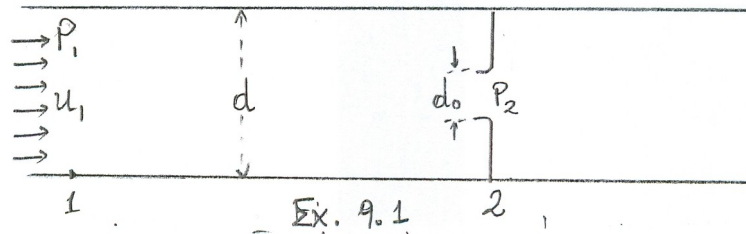
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}\Phi\left(\frac{d}{l}\right), \quad \frac{d}{l} \ll 1, \quad (8.12)$$

ή

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{d}}\Phi'\left(\frac{l}{d}\right), \quad \frac{d}{l} \gg 1, \quad (8.13)$$

όπου στο αριστερό μέρος οι άγνωστες συναρτήσεις μπορούν να προσδιοριστούν ή προσεγγιστούν χρησιμοποιώντας την φυσική διαίσθηση ή την πειραματική διαδικασία.

Για να εκτιμήσουμε την χρησιμότητα της διαστατικής ανάλυσης σε συνδυασμό με τους βασικούς νόμους της υδροδυναμικής σε ροές με σύνθετη γεωμετρία, ας θεωρήσουμε τη ροή του σχήματος σε σωλήνα με κάποιο περιοριστικό φράγμα. Ο κυλινδρικός σωλήνας έχει διατομή με διάμετρο d και κατά μήκος της ροής έχουμε φράγμα με κυκλική οπή διαμέτρου d_0 με κέντρο τον άξονα του κυλίνδρου. Η ταχύτητα ροής στο ένα άκρο είναι σταθερή και ίση με u_1 . Για να βρούμε την εξάρτηση της διαφοράς πίεσης στα σημεία 1 και 2 από την ταχύτητα u_1 την πυκνότητα του ρευστού ρ και την διάμετρο d_0 (η διάμετρος d θεωρείται δεδομένη), μπορούμε να κάνουμε μετρήσεις της πίεσης για σταθερή πυκνότητα και d_0 σαν συνάρτηση της ταχύτητας u_1 και να επαναλάβουμε τις μετρήσεις για διαφορετικές τιμές του d_0 , ώστε να έχουμε το αποτέλεσμα του σχήματος (2α), όπου η πυκνότητα είναι σε μονάδες της πυκνότητας του νερού και d_0 είναι ως



Σχήμα 8.1: Σχήμα 8.1 Ροή σε κυλινδρικό σωλήνα με φράγμα δακτυλίου με κυκλική οπή.

προς το d . Για υγρό διαφορετικής πυκνότητας απαιτείται επανάληψη των παραπάνω μετρήσεων. Αυτή η κοπιαστική διαδικασία μπορεί να αποφευχθεί εφόσον αξιοποιήσουμε τα αποτελέσματα της διαστατικής ανάλυσης.

Ας υποθέσουμε ότι η επίδραση του ιξώδους στα τοιχώματα είναι αμελητέα και η δημιουργία στροβιλισμού περιορίζεται σε ένα λεπτό οριακό στρώμα και δεν φτάνει στον άξονα. Στην περιοχή κοντά στο φράγμα που μπορεί να δημιουργήσει στροβιλισμό, θεωρούμε ότι αυτός περιορίζεται στις γωνίες. Έτσι αν θεωρήσουμε την γραμμή ροής πάνω στον άξονα συμμετρίας, περιμένουμε να είναι αστρόβιλη και επομένως ισχύει η απλή μορφή της εξίσωσης *Bernoulli*

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho u_2^2 - \frac{1}{2}\rho u_1^2 \quad (8.14)$$

Εδώ επίσης υποθέσαμε ότι έχουμε μόνιμη ασυμπίεστη ροή και χαμηλό ιξώδες ώστε κοντά στο φράγμα να έχουμε ομαλή σύγκλιση των γραμμών ροής. Οι συνθήκες αυτές ικανοποιούνται στα σημεία 1 και 2 μακριά από επιφάνειες. Από την εξίσωση συνέχειας για κυκλικές διατομές και υποθέτοντας σχεδόν σταθερή ταχύτητα σε κάθε διατομή, έχουμε

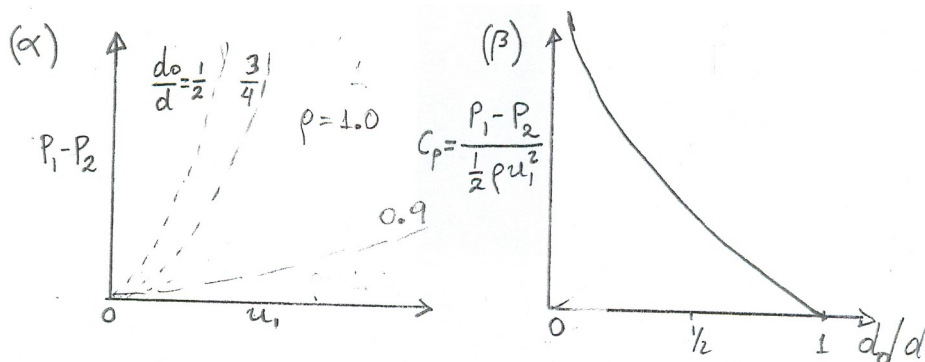
$$\frac{u_2}{u_1} = \left(\frac{d}{d_0}\right)^2, \quad (8.15)$$

ώστε απαλείφοντας την ταχύτητα u_2 από την εξίσωση (8.14), έχουμε για τον συντελεστή πίεσης

$$C_p = \frac{P_1 - P_2}{\frac{1}{2}\rho u_1^2} = \left(\frac{d}{d_0}\right)^2 - 1 \quad (8.16)$$

Έτσι λοιπόν για ιδανικές συνθήκες περιμένουμε ότι ένα διάγραμμα της κανονικοποιημένης πίεσης, δηλ. του αδιάστατου αριθμού C_p συναρτήσεως του λόγου $\frac{d_0}{d}$ θα μας δώσει μία μόνο καμπύλη (δες Σχ. 2β) η οποία συνοψίζει τα αποτελέσματα των καμπυλών στο Σχ.2α. Ταυτόχρονα ξέρουμε πως μεταβάλλεται η διαφορά πίεσης με την πυκνότητα και την ταχύτητα ροής u_1 . Μια προειδοποίηση όμως είναι απαραίτητη: Η εξάρτηση από το λόγο $\frac{d_0}{d}$ για πραγματική ροή δεν θα είναι τόσο απλή εφόσον οι προϋποθέσεις που βάλουμε δεν ισχύουν. Για $\frac{d_0}{d} \ll 1$ περιμένουμε σημαντικές αποκλίσεις από την απλή αναλυτική σχέση. Η γεωμετρία είναι πολύπλοκη και η γεωμετρία των γραμμών ροής είναι πιά σύνθετη. Επιπλέον παραλείψαμε το ιξώδες του νερού, και θεωρήσαμε μόνο την επίδραση των τοιχωμάτων. Επίσης μετά τον λαιμό περιμένουμε διαχωρισμό, όπου η περιοχή που διατηρείται η αστρόβιλη ροή έχει διάμετρο πολύ μικρότερη από d_0 . Εν τούτοις και πάλι περιμένουμε για σημαντικό αριθμό Re ότι η εξάρτηση του C_p θα είναι κυρίως από το λόγο $\frac{d_0}{d}$, δηλαδή $C_p = f_1\left(\frac{d_0}{d}\right)$, όπου $f_1\left(\frac{d_0}{d}\right)$ είναι μία άγνωστη συνάρτηση η οποία προσδιορίζεται με μόνο δύο καμπύλες στο Σχ. 2α. Η δεύτερη χρειάζεται για να βεβαιωθούμε ότι ισχύουν οι συνθήκες ροής που υποθέσαμε.

Παραπάνω καταφέραμε να περιορίσουμε ένα πρόβλημα με πέντε μεταβλητές ($\Delta P, \rho, u_1, d, d_0$) σε δύο ($\Delta P/(\rho u_1^2/2), d/d_0$) οι οποίες είναι και αδιάστατες. Σημειωτέον ότι δεν υπάρχουν άλλες αδιάστατες ποσότητες χρησιμοποιώντας τις πέντε. Φυσικά ένας πιά παρατηρητικός ερευνητής



Σχήμα 8.2: Σχήμα 8.2 (α) Σχεδιάγραμμα μετρήσεων $P_1 - P_2$ συναρτήσει u_1 για διάφορες τιμές του d_0/d και $\rho = 1$. (β) Σχεδιάγραμμα μετρήσεων των αδιάστατων αριθμών C_p και d_0/d .

θα θεωρούσε ότι υπάρχουν και άλλα μήκη και θα ήθελε να διερευνήσει περαιτέρω το θέμα όσο αφορά την επίδρασή τους στον συντελεστή πίεσης. Π.χ. άλλο μήκος είναι το πάχος του λαιμού, το χαρακτηριστικό μήκος διάχυσης του στροβιλισμού που συνδέεται με τον αριθμό Re κτλ.. Αυτό σημαίνει ότι η απλή χρήση του θεωρήματος *Bernoulli* δεν αρκεί για να δώσει λύση στο πρόβλημα. Έτσι η πρόοδος εναπόκειται στην εξεύρεση των πιθανών αδιάστατων ποσοτήτων και την πειραματική μέτρηση για τον καθορισμό των σημαντικών στη διαμόρφωση της ροής. Ο καθορισμός των πιθανών αδιάστατων παραμέτρων και η μορφή τους ορίζεται από το Θεώρημα *Buckingham* που θα δούμε στη συνέχεια.

8.3 Διαστατική ομοιογένεια και θεΨρήμα *Buckingham*

Πίνακας1

ΠοσΨτητα	ΣΨμβολο	Διαστάσεις(L, T, M)
Μήκος	L	L
Επιφάνεια	A	L^2
Ογκος	V, Ω	L^3
Ταχύτητα	U	LT^{-1}
επιτάχυνση	a	LT^{-2}
Γωνιακή ταχύτητα	ω	T^{-1}
Ρυθμός ροής όγκου	Q	L^3T^{-1}
Ρυθμός ροής μάζας	\dot{m}	MT^{-1}
Δύναμη	F	MLT^{-2}
Πίεση, τάση	P, σ	$ML^{-1}T^{-2}$
ΙξΨδες	μ	$ML^{-1}T^{-1}$
Κινηματικό ιξΨδες	ν	L^2T^{-1}
Επιφανειακή τάση	σ	MT^{-2}
Ροπή	τ	ML^2T^{-2}
Ορμή	p	MLT^{-1}
Ενέργεια, έργο	E, W	ML^2T^{-2}
Ισχύς	P	ML^2T^{-3}
ΠυκνΨτητα	ρ	ML^{-3}
Θερμοκρασία	Θ	Θ
Εντροπία	S	$ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$
Θερμική αγωγιμΨτητα	κ	$MLT^{-3}\Theta^{-1}$

(8.17)

Σε κάθε σύστημα μονάδων μπορούμε να θεωρήσουμε μερικές ποσΨτητες σαν βασικές Ψστε οι διαστάσεις των υπολοίπων να εκφράζονται συναρτήσει αυτών. Έτσι π.χ. άν θεωρήσουμε σαν βασικές³ το μήκος (L), την μάζα (M), τον χρόνο (T), την θερμοκρασία (Θ), τότε οι υπόλοιπες εκφράζονται συναρτήσει αυτών Ψπως φαίνεται στον πίνακα 1. Έτσι π.χ. οι διαστάσεις της ταχύτητας είναι $[u] = LT^{-1}$ Ψπου ο συμβολισμός $[u]$ οφείλεται στον *Maxwell* και το Ψμβολο $[u]$ υποδηλώνει τις διαστάσεις της ποσΨτητας u συναρτήσει των βασικών. Μια αδιάστατη ποσΨτητα ϕ γράφεται για τις διαστάσεις Ψς $[\phi] = 1$, καθΨσον η αριθμητική της τιμή είναι η ίδια σε οποιοδήποτε σύστημα μονάδων. Η επιλογή των βασικών διαστάσεων έχει ένα βαθμό αυθαίρεσίας, π.χ. αντί της μάζας M μπορούμε να επιλέξουμε την πυκνΨτητα ρ καθΨσον $M = \rho L^3$. Για την κατάλληλη επιλογή παίρνουμε Ψπόψη το φυσικό πρόβλημα.

Στόν Πίνακα 1 βλέπουμε Ψτι Ψλες οι διαστάσεις μπορούν να εκφραστούν σαν πολυωνυμικές δυνάμεις της μορφής

$$[\Psi] = CL^\alpha M^\beta T^\gamma \quad (8.18)$$

Ψπου C και οι δυνάμεις α, β, γ είναι σταθερές. Αυτή η ιδιΨτητα που είναι γενική αρχή, ονομάζεται διαστατική αρχή και είναι καθοριστική για την διαστατική ανάλυση. Π. χ. για το πρόβλημα του εκκρεμούς έχουμε

$$[\omega] = T^{-1}, \quad [g] = LT^{-2}, \quad [l] = L, \quad \text{και} \quad [m] = M. \quad (8.19)$$

³Έάν το ρευστό περιέχει ηλεκτρικά φορτία ή ρεύματα τότε πρέπει να προσθέσουμε στις βασικές μονάδες και το ηλεκτρικό φορτίο. Αυτό ισχύει άν το ρευστό είναι πλάσμα. Για μακροσκοπικά προβλήματα πιο χρήσιμο είναι το ρεύμα I οι μονάδες του Ψποίου είναι φορτίο ανά μονάδα χρόνου.

Εάν τώρα το ω είναι συνάρτηση των g, l, m τότε θα είναι της μορφής

$$[\omega] = [g]^\alpha [l]^\beta [m]^\gamma = (LT^{-2})^\alpha L^\beta M^\gamma \quad (8.20)$$

$$= L^{\alpha+\beta} T^{-2\alpha} M^\gamma \quad (8.21)$$

και για να ισούται με T^{-1} πρέπει να ισχύει

$$\alpha + \beta = 0, \quad 2\alpha = 1, \quad \gamma = 0 \quad (8.22)$$

ή

$$\alpha = -\beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 0 \quad (8.23)$$

και βρίσκουμε $\omega = c\sqrt{\frac{g}{l}}$ όπως περιμέναμε. Ο προσδιορισμός της σταθεράς c γίνεται με πειραματικές μετρήσεις του ω σαν συνάρτηση του l . Ο αποκλεισμός της εξάρτησης από τη μάζα, όπως συμπεραίνεται από τη διαστατική αρχή διευκολύνει την πειραματική διερεύνηση.

Η παραπάνω διαδικασία συστηματικοποιείται στο θεώρημα *Buckingham* που διαχωρίζει τις φυσικές ποσότητες σε ανεξάρτητες (βασικές) και εξαρτημένες, των οποίων οι διαστάσεις μπορεί να είναι διαφορετικές ή ίδιες από τις βασικές, αλλά ακόμη και μεταξύ τους υπάρχουν μεταβλητές που έχουν ίδιες διαστάσεις. Π.χ. στη ροή γύρω από σφαίρα έχουμε μόνο ένα χαρακτηριστικό μήκος που είναι η διάμετρος της σφαίρας, ενώ για τη ροή γύρω από ένα ελλειψοειδές έχουμε δύο μήκη, το ένα από τα οποία θα διαλέξουμε ως βασικό και το άλλο ως εξαρτημένο. Το πίο από τα δύο θα διαλέξω σαν βασικό εξαρτάται από τον προσανατολισμό σε σχέση με τη σταθερή ροή. Η επιλογή κάποιου μήκους ως βασικού σημαίνει ότι οι σημαντικές μεταβολές στη ροή συμβαίνουν σε αυτό το μήκος, και το θεωρούμε ως τη φυσική κλίμακα του προβλήματος. Είναι επίσης πιθανόν ότι για διαφορετικές φυσικές ποσότητες διαφορετικά μήκη είναι τα σημαντικά και για αυτό απαιτείται προσοχή.

Εν γένει σε ένα φυσικό σύστημα, η μέτρηση μιας εξαρτημένης μεταβλητής a δίνεται σαν συνάρτηση από n ελεγχόμενες παραμέτρους, $j = 3, 4$ από τις οποίες είναι ανεξάρτητες και οι υπόλοιπες $k = n - j$ είναι εξαρτημένες.

$$a_i = f(\overbrace{a_1, \dots, a_j}^{j \text{ ανεξάρτητες}}, \overbrace{a_{j+1}, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n}^{k \text{ εξαρτημένες}}), \quad i = j + 1, \dots, n \quad (8.24)$$

Η επιλογή των κλιμάκων των ανεξάρτητων μεταβλητών σημαίνει ότι κάθε εξαρτημένη μεταβλητή μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει αυτών (όχι απαραίτητα όλων). Ετσι για κάθε εξαρτημένη μεταβλητή μπορούμε να ορίσουμε την αδιάστατη μορφή

$$\Pi_i = \frac{a_i}{a_1^{p_i} \dots a_j^{q_i}}, \quad i = j + 1, \dots, n \quad (8.25)$$

όπου οι αριθμοί p_i, \dots, q_i είναι κατάλληλες δυνάμεις για διαστατική ομοιότητα, που μπορεί να είναι και μηδενικοί. Επειδή η σχέση μεταξύ των παραμέτρων πρέπει να είναι διαστατικά ομοιογενής, αυτό οδηγεί σε μία σημαντική απλοποίηση που βασίζεται στο θεώρημα *Buckingham*. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να γράψουμε την σχέση ανάμεσα στις k εξαρτημένες αδιάστατες ποσότητες, δηλ.

$$\Pi_i = \Phi_i(P_{j+1}, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n), \quad i = j + 1, \dots, n \quad (8.26)$$

όπου η $\Phi_i(\dots)$ είναι συνάρτηση μόνο $k = n - j$ μεταβλητών και μάλιστα σε αδιάστατη μορφή, αλλά διαφορετική για κάθε περίπτωση. Είναι δε οι αδιάστατες ποσότητες να ομαδοποιηθούν σε ομάδες και οι συναρτήσεις συσχετίζουν μόνο μεταβλητές από την ίδια ομάδα. Δυστυχώς η αναλυτική μορφή της $\Phi_i(\dots)$ δέν δίνεται από τη διαστατική ανάλυση και γι αυτό το σκοπό πρέπει να καταφύγουμε στη δημιουργία μιας θεωρίας η ενός μοντέλλου.

Στο παράδειγμα του εκκρεμούς με κατανομημένη μάζα (όχι απαραίτητα ομογενώς) έχουμε πέντε παραμέτρους ω, g, l, m , και I . Από αυτές τρεις ($j = 3$) θεωρούνται ως βασικές και επιλέγουμε τις g, l και m . Έτσι έχουμε δύο εξαρτημένες ποσότητες των οποίων η αδιάστατη μορφή είναι

$$\Pi_1 = \frac{\omega}{\sqrt{g/l}}, \quad \Pi_2 = \frac{I}{ml^2} \quad \longrightarrow \quad \Pi_1 = \Phi(\Pi_2).$$

Για τη ροή γύρω από μία σφαίρα χωρίς βαρύτητα στον υπολογισμό της δύναμης στη σφαίρα $F(L, U, \rho, \mu)$ έχουμε πέντε ($n = 5$) παραμέτρους από τις οποίες διαλέγουμε τις L, U, ρ ως βασικές καθόσον μόνο η ρ περιέχει τη μάζα και μόνο η U περιέχει τον χρόνο. Έτσι είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και δεν μπορούμε να σχηματίσουμε αδιάστατη ποσότητα μεταξύ τους. Απομένουν δύο F και μ για τις οποίες μπορούμε να σχηματίσουμε τις παρακάτω αδιάστατες ποσότητες

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= L^\alpha U^\beta \rho^\gamma F = L^0 U^0 \rho^0, \quad \longrightarrow \quad \alpha = -2, \beta = -2, \gamma = -1, \quad \longrightarrow \quad \Pi_1 = \frac{F}{\rho U^2 L^2} \equiv (8.27) \\ \Pi_2 &= L^\alpha U^\beta \rho^\gamma \mu^{-1} = L^0 U^0 \rho^0, \quad \longrightarrow \quad \alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, \quad \longrightarrow \quad \Pi_2 = \frac{\rho U L}{\mu} \equiv Re \quad (8.28) \end{aligned}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα *Buckingham* Δεν υπάρχει άλλος ανεξάρτητος αδιάστατος αριθμός, και μπορούμε να γράψουμε

$$\Pi_1 = \Phi(\Pi_2) \implies C_D = \Phi(Re) \longrightarrow \frac{F}{\rho U^2 L^2} = \Phi\left(\frac{\rho U L}{\mu}\right),$$

όπου $\Phi(Re)$ είναι άγνωστη ακόμη συνάρτηση. Στο τελευταίο βήμα για να βρούμε τις αδιάστατες ποσότητες γράψαμε το γινόμενο δυνάμεων των βασικών παραμέτρων επί την πρώτη δύναμη της εξαρτημένης ποσότητας F , εκφρασμένα στις βασικές διαστάσεις (M, L, T), και βρίσκουμε τις δυνάμεις α, β, γ ώστε

$$P_1 = L^\alpha U^\beta \rho^\gamma F = L^\alpha (LT^{-1})^\beta (ML^{-3})^\gamma (MLT^{-2}) = M^0 L^0 T^0.$$

Για τη δύναμη του F στην Π_1 διαλέξαμε τη μονάδα επειδή είναι η ποσότητα που θα μετρήσουμε. Θα μπορούσαμε να επιλέξουμε -1 που θα είχε σαν αποτέλεσμα να βρούμε τον αντίστροφο αδιάστατο αριθμό. Μάλιστα οποιαδήποτε ατέραια επιλογή δύναμης του F θα μας έδινε αντίστοιχη δύναμη του αδιάστατου αριθμού. Σε αντίθεση για τον άλλο αδιάστατο αριθμό πήραμε το ιξώδες στην -1 δύναμη, διότι έτσι έχουμε τον αριθμό Re για τον αντίστοιχο αδιάστατο αριθμό.

8.4 Παραδείγματα Διαστατικής ανάλυσης

8.4.1 Οριακή ταχύτητα σε ιξωδικό ρευστό

Ας θεωρήσουμε μία σφαίρα ακτίνας R η οποία πέφτει υπό την επίδραση της βαρύτητας (g) σε ένα παχύρευστο υγρό με σταθερά ιξώδους μ . Κάτω από την επίδραση της βαρύτητας η σφαίρα επιταχύνεται αλλά αυτο σημαίνει ότι και οι ιξωδικές δυνάμεις αυξάνουν τείνοντας να αντισταθμίσουν την δύναμη της βαρύτητας και να οδηγήσουν σε πτώση με οριακή ταχύτητα u_0 . Χρησιμοποιώντας την διαστατική ανάλυση θα προσπαθήσουμε να βρούμε πως συνδέεται η ταχύτητα u_0 με τις άλλες φυσικές παραμέτρους του προβλήματος. Στην διαδρομή αυτή θα δούμε ότι η διαστατική ανάλυση από μόνη της δεν επαρκεί αλλά απαιτεί και επιπλέον υποθέσεις. Λόγω του γεγονότος ότι έχουμε περισσότερες μεταβλητές θα έχουμε και περισσότερους από δύο αδιάστατους αριθμούς. Επίσης έχουμε τρεις ανταγωνιστικές δυνάμεις: βαρύτητα, άνωση και ιξωδική δύναμη. Ανάλογα με το ποιες είναι οι επικρατέστερες περιμένουμε και διαφορετικές σχέσεις για την οριακή ταχύτητα.

Κατ αρχήν στο πρόβλημα έχουμε $n = 6$ σημαντικές παραμέτρους:

R	–	ακτίνα σφαίρας	
μ	–	δυναμικό ιξώδες	
g	–	επιτάχυνση της βαρύτητας	
$\rho_{\text{σφαίρα}}$	–	πυκνότητα της σφαίρας	(8.29)
$\rho_{\text{υγρό}}$	–	πυκνότητα του ρευστού	
u_0	–	οριακή ταχύτητα της σφαίρας	

Δέν είναι πάντα εύκολο σε ένα πρόβλημα να ξεκαθαρήσουμε ποιοί είναι οι σημαντικοί παράμετροι. Π.χ. αν είχαμε την πτώση ενός κυλίνδρου, θα είχαμε δύο μήκη να θεωρήσουμε, το ύψος h και τη διάμετρο βάσης d . Η συμμετοχή της μίας ή της άλλης (ή και των δύο) εξαρτάται από το λόγο $\frac{d}{h}$, ενώ είναι δυνατόν ανάλογα με τον προσανατολισμό κατά την πτώση να πάρουμε υπόψη την περιστροφή και επομένως την ροπή αδράνειας I . Αν και για ισχυρό ιξώδες θα έχουμε απόσβεση στην περιστροφή. Από τις παραπάνω ποσότητες τρεις (M , L , T) η μάζα, μήκος και χρόνος συνήθως θεωρούνται οι βασικές. Ισοδύναμα όμως μπορούμε να κάνουμε και την επιλογή άλλων τριών που είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, π.χ. η πυκνότητα του υγρού $\rho_{\text{υγρό}}$, η ακτίνα της σφαίρας R και επιτάχυνση της βαρύτητας g . Σύμφωνα με το θεώρημα *Buckingham* απομένουν τρεις εξαρτημένες μεταβλητές u_0 , $\rho_{\text{σφαίρα}}$, μ και επομένως μπορούμε να κατασκευάσουμε τρεις αδιάστατες ποσότητες Π_1 , Π_2 , Π_3

$$\Pi_1 = \frac{\rho_{\text{σφαίρα}}}{\rho_{\text{υγρό}}} \longrightarrow \frac{\text{δύναμη βαρύτητας}}{\text{δύναμη άνωσης}} \quad (8.30)$$

$$\Pi_2 = \frac{u_0^2}{Rg} \longrightarrow \frac{\text{δύναμη αδράνειας}}{\text{δύναμη βαρύτητας}} \quad (8.31)$$

$$\Pi_3 = \frac{\rho_{\text{υγρό}} R u_0}{\mu} \longrightarrow \frac{\text{δύναμη αδράνειας}}{\text{δύναμη ιξώδους}} \quad (8.32)$$

Από καθαρά διαστατική θεώρηση οι αδιάστατες αυτές ποσότητες είναι απόλυτα κατανοητές, αλλά και από τη φυσική του προβλήματος θα μπορούσαν να εξαχθούν. Η Π_1 είναι αυτόματη συνέπεια της ύπαρξης δύο πυκνοτήτων (σφαίρα και υγρό). Είναι ο λόγος δύο ανταγωνιστικών δυνάμεων, βαρύτητα προς άνωση. Από τη φυσική περιμένουμε ότι αν $\rho_{\text{υγρό}} < \rho_{\text{σφαίρα}}$ ($\Pi_1 > 1$), τότε θα έχουμε πτώση της σφαίρας, ενώ για $\rho_{\text{υγρό}} > \rho_{\text{σφαίρα}}$ ($\Pi_1 < 1$), θα έχουμε άνοδο της σφαίρας. Το δεύτερο θα συνέβαινε π.χ. αν η σφαίρα ήταν φυσαλίδα αέρος. Ο αριθμός Π_2 είναι το τετράγωνο του αριθμού *Froude* και μας δίνει το λόγο της αδρανειακής δύναμης ως προς την δύναμη βαρύτητας, που μπορεί να θεωρηθεί και ως ο λόγος της κινητικής ενέργειας της σφαίρας δια την μεταβολή της δυναμικής ενέργειας στο μήκος R . Ο αριθμός Π_3 μας δίνει το λόγο της δύναμης αδράνειας προς την δύναμη ιξώδους, δηλ. ο αριθμός *Reynolds*. Βασιζόμενοι στο θεώρημα *Buckingham* έχουμε $\Pi_2 = f(\Pi_3, \Pi_1)$ ή

$$\frac{u_0^2}{Rg} = f \left(\frac{\rho_{\text{υγρό}} R u_0}{\mu}, \frac{\rho_{\text{σφαίρα}}}{\rho_{\text{υγρό}}} \right) \quad (8.33)$$

Η επιλογή $\Pi_2 = f(\Pi_3, \Pi_1)$ και όχι η $\Pi_3 = f_3(\Pi_2, \Pi_1)$ είναι αυθαίρετη προς το παρόν, αλλά θα προσπαθήσουμε να την αιτιολογήσουμε.

Το θεώρημα *Buckingham* δε μας βοηθά να προχωρήσουμε και να βρούμε την αναλυτική μορφή της συνάρτησης $f(\Pi_3, \Pi_1)$. Μπορούμε όμως να κάνουμε σημαντική πρόοδο αν χρησιμοποιήσουμε φυσικά επίχειρήματα παράλληλα με διαστατική ανάλυση. Συχνά η φυσική μπορεί να

μας οδηγήσει σε σημαντικές απλοποιήσεις, περιορίζοντας εξ αρχής τον αριθμό των αδιάστατων παραμέτρων που επηρεάζουν την ροή. Ας περιοριστούμε λοιπόν στην περίπτωση που ο αριθμός *Reynolds* ($Re \ll 1$) είναι μικρός που σημαίνει ότι η επίδραση της αδρανειακής δύναμης είναι πολύ μικρή και στην εξίσωση *Euler* οι ιξωδικές δυνάμεις αντισταθμίζουν την βαρύτητα και την άνωση, οι οποίες είναι ανάλογες προς την επιτάχυνση g της βαρύτητας, ώστε να μας δώσουν μηδέν επιτάχυνση (για οριακή ταχύτητα). Επειδή όμως η δύναμη του ιξώδους είναι ανάλογη του μ , δηλ. έχουμε

$$\text{Δύναμη βαρύτητα} - \text{δύναμη άνωσης} (\sim g) = \text{αντίσταση ιξώδους} (\sim \mu). \quad (8.34)$$

Περιμένουμε λοιπόν ότι οι σταθερές g και μ θα απαντώνται σαν ο λόγος $\frac{g}{\mu}$, που σημαίνει ότι για να είναι το g ανάλογο του μ πρέπει η σταθερά $P_3 = \frac{\rho_{\text{υγρό}} R u_0}{\mu}$ να είναι ένας πολλαπλασιαστικός παράγοντας στην f και επομένως έχουμε

$$\frac{u_0^2}{Rg} = \frac{\rho_{\text{υγρό}} R u_0}{\mu} f' \left(\frac{\rho_{\text{σφαίρα}}}{\rho_{\text{υγρό}}} \right), \quad (8.35)$$

όπου f' είναι μία άγνωστη συνάρτηση της $\Pi_1 = \frac{\rho_{\text{σφαίρα}}}{\rho_{\text{υγρό}}}$. Για να κάνουμε και το τελευταίο βήμα πάλι καταφεύγουμε στη Φυσική. Παρατηρούμε ότι αν οι πυκνότητες είναι ίσες ($\Pi_1 = \frac{\rho_{\text{σφαίρα}}}{\rho_{\text{υγρό}}} = 1$), τότε η σφαίρα ισοροπεί ακίνητη με μηδενική ταχύτητα ($u_0 = 0$) διότι η δύναμη της βαρύτητας ισούται με την άνωση $g(\rho_{\text{σφαίρα}} - \rho_{\text{υγρό}}) = 0$. Εάν δε $u_0 = 0$ δεν έχουμε και ιξωδικές δυνάμεις. Για να συμβεί αυτό πρέπει

$$f' \left(\frac{\rho_{\text{σφαίρα}}}{\rho_{\text{υγρό}}} \right) = C \left(\frac{\rho_{\text{σφαίρα}}}{\rho_{\text{υγρό}}} - 1 \right) \quad (8.36)$$

όπου C είναι μία άγνωστη σταθερά. Έχουμε λοιπόν για την οριακή ταχύτητα

$$u_0 = C \frac{\rho_{\text{υγρό}}}{g\mu} \left(\frac{\rho_{\text{σφαίρα}}}{\rho_{\text{υγρό}}} - 1 \right), \quad (8.37)$$

Στην παρούσα περίπτωση μπορούμε να υπολογίσουμε και την σταθερά C με απλές πράξεις. Η βαρύτητα μείον την άνωση είναι

$$\frac{4\pi}{3} (\rho_{\text{σφαίρα}} - \rho_{\text{υγρό}}) g R^3$$

. Στην προσέγγιση *Stokes* η αντίσταση της τριβής είναι

$$F_D = 6\pi\mu u_0 R$$

και εξίσωση με τις βαρυτικές δυνάμεις μας δίνει την (8.35) και ταυτόχρονα την σταθερά $C = 2/9$. Εάν η σφαίρα ήταν φουσκά αέρος που αναδύεται από το ρευστό στην επιφάνεια λόγω άνωσης ($\rho_{\text{φουσκά αέρος}} \ll \rho_{\text{υγρό}}$) η τιμή της σταθεράς $C = 1/9$.

8.4.2 Δύναμη αντίστασης σε βυθισμένο σώμα σε οριζόντια κίνηση.

Εστω ένα βυθισμένο σώμα με χαρακτηριστική διάσταση L που κινείται οριζόντια σε ένα ρευστό με ταχύτητα U . Θα παραλείψουμε την βαρύτητα, εάν ο όρος αυτός είναι αρκετά μικρότερος από τον ιξωδικό, ενώ ήδη παραλείψαμε τον αδραειακό, καθόσον $Re \ll 1$. Έτσι θέλουμε

$$\frac{Re}{Fr} = \frac{\rho g}{\mu U L^2} \ll 1.$$

Φυσικά πρέπει να υπάρχει και κάθετος δύναμη ώστε να στηρίζεται το σώμα. Αλλά και να μην υπάρχει υποθέτουμε ότι η κάθετη μετατόπιση είναι αμελητέα σε σχέση με το μέγεθος του σώματος αλλά και την οριζόντια μετατόπιση. Αυτό βάζει περιορισμούς στον χρόνο παρατήρησης. $t \ll \sqrt{\frac{L}{g}}$, $t \ll \frac{U}{g}$. Εδώ έχουμε πέντε σημαντικές μεταβλητές (F_d , L , U , μ , ρ), τρεις από τις οποίες είναι βασικές (L , U , ρ), ενώ για τις άλλες δύο, F_d και μ , μπορούμε να ορίσουμε τους αδιάστατους αριθμούς

$$Re = \frac{\rho L U}{\mu}, \quad C_D = \frac{F_D}{\rho L^2 U^2 / 2}.$$

Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε και το γινόμενο τους που μας δίνει πάλι αδιάστατο αριθμό

$$C' = \frac{1}{2} C_D Re = \frac{F_D}{L U \mu}$$

που μαζί με τον αριθμό *Reynolds* μας δίνει ένα άλλο ζευγάρι. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να είχαμε διαλέξει ως βασικές ποσότητες τις L , U , μ . Αυτό είναι λογικό καθόσον περιμένουμε το ιξώδες να παίζει καθοριστικό ρόλο. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$C' = \frac{F_D}{L U \mu} = \Phi(Re)$$

Για την ερπυστική ροή γύρω από σφαίρα γνωρίζουμε ότι $F_D = 3\pi d U \mu$ όπου $d \rightarrow L$ είναι η διάμετρος της σφαίρας. Έτσι για $Re \ll 1$ η πειραματική διερεύνηση θα μας δώσει $\Phi(Re) = 3\pi$.

Για μεγάλες τιμές του Re περιμένουμε ο αδραειακός όρος να είναι σημαντικός και επομένως είναι πιο σωστό να θεωρήσουμε ως βασικές τις L , U , ρ . Έτσι έχουμε

$$C_D = \frac{F_D}{\rho L^2 U^2 / 2} = G(Re), \quad \rightarrow F_D = \rho L^2 U^2 / 2 G(Re).$$

Εάν τώρα $20 < Re < 2.000$ τότε η συνάρτηση $G(Re) \sim \sqrt{\frac{1}{Re}}$ ενώ για Re μέχρι 10^5 θα βρούμε $G(Re) \sim 1$, όπως φαίνεται στο Σχ. 4. Για μεγαλύτερο αριθμό *Reynolds* έχουμε απότομη πτώση του συντελεστή αντίστασης. Στα όρια αυτά έχουμε εξάρτηση από την αδρότητα της επιφάνειας της σφαίρας. Επιπλέον αν η ταχύτητα ροής πλησιάζει την ταχύτητα του ήχου τότε θα έχουμε συμπίεστικότητα του ρευστού και θα έχουμε και εξάρτηση από τον αριθμό *Mach*.

Σχ. 9.4 Μεταβολή του συντελεστή αντίστασης συναρτήσει του αριθμού *Reynolds* για ροή γύρω από σφαίρα.

8.4.3 Δύναμη ανύψωσης πτερυγίου.

Σχ. 9.5 Πτερύγιο σε σταθερή ροή. τα χαρακτηριστικά του πτερυγίου είναι το μήκος χορδής D και η γωνία κλίσης α .

Ας εφαρμόσουμε την τεχνική της διαστατικής ανάλυσης στην δύναμη ανύψωσης σε ένα πτερύγιο. Τα σημαντικά χαρακτηριστικά του πτερυγίου (δες Σχ. ;;;;) είναι το μήκος χορδής D και η γωνία κλίσης της χορδής με την οριζόντια, α . Η δύναμη ανύψωσης πρέπει να αντισταθμίσει το βάρος του αεροπλάνου, αλλά δεν θεωρούμε ότι επηρεάζει τη ροή και έτσι δεν συμπεριλάβαμε το g σαν σημαντική παράμετρο. Εάν όμως η δύναμη ανύψωσης γίνει μικρότερη από το βάρος, τότε η βαρύτητα είναι καθοριστική για την επιταχυνόμενη πορεία προς το έδαφος. Σκοπός μας είναι να βρούμε τη σχέση που συνδέει την δύναμη ανύψωσης F_L με τις γεωμετρικές και άλλες παραμέτρους ροής, όπως η ταχύτητα U , η πυκνότητα ρ , και ιξώδες μ , δηλ.

$$F_L = f(U, \alpha, D, \rho, \mu).$$

Από τις έξι μεταβλητές θεωρούμε τρεις ως βασικές, την πυκνότητα (ρ), την ταχύτητα (U) και το μήκος χορδής (D), οι οποίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, δηλ. δεν μπορούμε να βρούμε αδιάστατο αριθμό μεταξύ τους. Για τις υπόλοιπες δύο F_L και μ θα βρούμε τους αντίστοιχους αδιάστατους αριθμούς, ενώ η γωνία α είναι αδιάστατη ποσότητα. Για την δύναμη ανύψωσης έχουμε την αδιάστατη ποσότητα

$$C_L = \frac{F_L}{\rho D^2 U^2 / 2}$$

όπου C_L είναι ο συντελεστής ανύψωσης, ενώ για το ιξώδες έχουμε τον αριθμό

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα *Buckingham* έχουμε

$$C_L = f(Re, \alpha) \longrightarrow \frac{F_L}{\rho D^2 U^2 / 2} = f\left(\frac{\rho U D}{\mu}, \alpha\right)$$

Έτσι κατασκευάζοντας ένα μοντέλλο πτερύγιο και κρατώντας σταθερή τη γωνία α και τον αριθμό Re , η μέτρηση του συντελεστή ανύψωσης C_L στο μοντέλλο θα είναι ίδια με το πρωτότυπο. Η εύρεση της αναλυτικής μορφής απαιτεί τη διενέργεια πειραματικών μετρήσεων. Θα μπορούσε όμως να υποθέσει κανείς ότι για μικρές γωνίες η δύναμη ανύψωσης είναι ανάλογη της γωνίας.

Για μεγάλο αριθμό Re περιμένουμε ότι η δύναμη ανύψωσης δεν εξαρτάται από το ιξώδες και επομένως έχουμε

$$F_L \sim \rho U^2 D^2 \alpha$$

που είναι σύμφωνο με τα αποτελέσματα της ανιξωδικής ροής. Η ιξωδική ροή είναι μόνο σημαντική κοντά στην επιφάνεια του πτερυγίου και μας δίνει την απαραίτητη κυκλοφορία Γ και συγκρίνοντας με την σχέση (3.2) συμπεραίνουμε ότι για το πτερύγιο η κυκλοφορία $\Gamma = ADU\alpha$, δηλ εξαρτάται από τη γωνία α , και η σταθερά A , που είναι ένας αριθμός της τάξης $O(\infty)$ αλλάζει με τη γεωμετρία του πτερυγίου. Να παρατηρήσουμε ότι το αποτέλεσμα αυτό, μπορεί να εξαχθεί με μιγαδική ανάλυση, εφόσον θεωρήσουμε ότι το μήκος L της πρόσοψης του πτερυγίου είναι μεγάλο ($L \gg D$). Αυτό βασίζεται στη γνώση της ιξωδικής ροής γύρω από κύλινδρο (ή άλλο κυλινδρικό σχήμα), ενώ με τεχνικές της μιγαδικής ανάλυσης μετασχηματίζουμε τον κύκλο στο σχήμα της διατομής του πτερυγίου. Ο ίδιος μετασχηματισμός θα μετατρέψει τη λύση για τον κυκλικό κύλινδρο σε αυτή για το πτερύγιο⁴

8.5 Μοντελλοποίηση και ομοιότητα.

Η ανάπτυξη μοντέλων είναι ένα σημαντικό εργαλείο της υδροδυναμικής και αεροδυναμικής συμπεριλαμβανομένης και της διαστημικής αεροπλοΐας. Γενικά είναι μία εμπειρική και πειραματική τεχνική αλλά χρησιμοποιεί και αποτελέσματα από την ανάλυση των υδροδυναμικών εξισώσεων. Η δημιουργία πειραματικών δεξαμενών, αεροσφαιρών ή άλλων κατασκευών για τον έλεγχο πλοίων ή αεροπλάνων δεν οφείλεται στην έλλειψη εμπιστοσύνης στις θεωρητικές προβλέψεις, αλλά διότι πολλά προβλήματα στην υδροδυναμική είναι τόσο σύνθετα και δαιδαλώδη, ώστε δεν είναι δυνατόν να λυθούν ακριβώς και αριθμητικά. Όπως και η θεωρητική ανάλυση έτσι και η πρακτική αξιολόγηση έχει τις τεχνικές της, αν και απαιτεί αρκετή εμπειρία για την διατύπωση του πειραματικού προβλήματος και την ακριβή κατασκευή του φυσικού μοντέλου. Για την εξαγωγή αξιόπιστων συμπερασμάτων και εμπειρικών σχέσεων απαιτείται μεγάλης διάρκειας παρατηρήσεις. Έτσι π.χ. το διαστημικό λεωφορείο πέρασε 100.000 ώρες πειραματικής μελέτης σε αεροσφαιράκι.

Η κύρια τεχνική που χρησιμοποιείται στην ανάλυση των αποτελεσμάτων από τα πειραματικά μοντέλα είναι η διαστατική ανάλυση. Αυτή θα μας βοηθήσει να περιορίσουμε τον αριθμό των σημαντικών αδιάστατων αριθμών και επομένως μείωση των απαραίτητων πειραματικών μετρήσεων. Αυτοί προκύπτουν από την διαδικασία βασισμένη στο θεώρημα *Buckingham* και την φυσική διαίσθηση. Η διαίσθηση επικουρείται από την συγκριτική μελέτη των διαφόρων όρων στις υδροδυναμικές εξισώσεις. Αυτό γίνεται με την τεχνική της αδιαστατοποίησης των εξισώσεων και οι συντελεστές σε κάθε όρο έχουν τις ίδιες διαστάσεις, λόγω της διαστατικής ομοιότητας σε μία εξίσωση. Οι λόγοι αυτών των συντελεστών μας δίνουν τους πύο σημαντικούς (συνήθως) αδιάστατους αριθμούς. Στην μοντελλοποίηση εξ' ίσου σημαντική είναι η έννοια της ομοιότητας, δηλ. το σύνολο των κανόνων με τους οποίους θα κατασκευάσουμε μοντέλα μικρών διαστάσεων, αλλά αρκετά 'όμοια' με τα πραγματικά ώστε να παράγουμε πειραματικά αποτελέσματα και συμπεράσματα που είναι αξιόπιστα αν κάνουμε την προέκταση στις πραγματικές διαστάσεις και συνθήκες.

⁴Τη λύση αυτή πρώτοι διατύπωσαν οι *Kutta* και *Joukowski*, όπως αναφέραμε στο Κεφ. 5 και θα προσπαθήσουμε να σκιαγραφήσουμε στο κεφάλαιο εφαρμογών με μιγαδική ανάλυση στον Β' τόμο.

Σχ.9.6 Γεωμετρική ομοιότητα ενός πρωτότυπου πτερυγίου και του μοντέλλου.

Η εύρεση των αδιάστατων παραμέτρων στην υδροδυναμική αποτελεί τη βάση της πειραματικής μοντελλοποίησης. Για την κατασκευή και σχεδιασμό ενός πτερυγίου αεροπλάνου απαιτείται η βεβαιότητα ότι θα έχει τα απαιτούμενα χαρακτηριστικά. Επειδή ο πειραματισμός εν πτήση είναι πολύ επικίνδυνος, απαιτείται η δοκιμαστική μελέτη σε ένα μοντέλλο που είναι όμοιο με το πραγματικό αλλά σε μικρότερη κλίμακα. Το πρώτο είναι ότι το πραγματικό και το μοντέλλο πρέπει να έχουν γεωμετρική ομοιότητα, δηλ. όλες οι γεωμετρικές διαστάσεις να είναι σε αναλογία. Π.χ. για ένα πτερύγιο (δες Σχ. 9.4) έχουμε τρία μήκη: η διατομή του ορίζεται από το μήκος χορδής D και το πάχος του πτερυγίου h , ενώ και το μήκος L είναι σημαντικό. Στην προσέγγιση του Κεφ. 5 θεωρήσαμε ότι $L \gg D, h$, δηλ το πτερύγιο είναι κυλινδρική (με διατομή όπως στο σχήμα) επιφάνεια και επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε διδιάστατη ροή. Έτσι το μοντέλλο θα έχει διαστάσεις D_m, h_m, L_m ώστε

$$\frac{D_m}{D} = \frac{h_m}{h} = \frac{L_m}{L} = \lambda \quad (8.38)$$

ώστε πάλι $L_m \gg D_m, h_m$. Στα άκρα του πτερυγίου μπορεί να έχουμε φαινόμενα που διαταράσσουν την διδιάστατη ροή, με τα οποία όμως δεν θα ασχοληθούμε. Επίσης θεωρούμε ότι και το σχήμα της διατομής μεταβάλλεται "όμοια". Οι διαφορικές εξισώσεις της υδροδυναμικής καθώς και οι οριακές συνθήκες είναι ίδιες σε αδιάστατη μορφή αν εκτός από τη γεωμετρική ομοιότητα επιβάλουμε και οι αδιάστατοι αριθμοί να είναι ίσοι στο πραγματικό και το μοντέλλο πτερύγιο. Τότε λέμε ότι έχουμε και δυναμική ομοιότητα. Έτσι θέλουμε τους ίδιους αριθμούς *Reynolds* (Re) και συντελεστή πίεσης C_P ,

$$Re = \frac{\rho L u_0}{\mu} = \frac{\rho_m L_m u_m}{\mu_m} \quad (8.39)$$

$$C_P = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2} \rho u_0^2} = \frac{\Delta P_m}{\frac{1}{2} \rho_m u_m^2} \quad (8.40)$$

Έτσι οι τιμές μέτρησης είναι ίδιες για τις αδιάστατες ποσότητες στι πρωτότυπο και το μοντέλλο. Αυτή είναι η διαδικασία που ακολουθείται στη πειραματική διερεύνηση των πτερυγίων σε τούνελ αέρος. Εάν η ταχύτητα της ροής είναι υψηλή τότε πρέπει να την συγκρίνουμε με την ταχύτητα του ήχου ώστε να βεβαιωθούμε ότι δεν έχουμε συμπιεστή ροή και επομένως μεταβολή της πυκνότητας, που έχει επίδραση και στην εξίσωση της ορμής. Έτσι επιπλέον έχουμε τον αριθμό *Mach* ο οποίος πρέπει να είναι ίδιος στο μοντέλλο και το πρωτότυπο.

$$Ma = \frac{u_0}{c_0} = \frac{u_m}{c_m} \quad (8.41)$$

Στην πράξη δεν είναι πάντα εύκολο να έχουμε τέλεια δυναμική ομοιότητα. Εάν θεωρήσουμε την αεροδυναμική συμπεριφορά του πτερυγίου τότε οι σημαντικοί αριθμοί είναι οι *Reynolds* και *Mach*. Απαλοίφοντας τις ταχύτητες από την (8.39) και (8.41) έχουμε τη σχέση

$$\frac{\nu_m}{\nu_0} = \frac{L_m c_m}{l c_0} \quad (8.42)$$

Επειδή το πρωτότυπο είναι πολύ μεγαλύτερων διαστάσεων και κινείται στον αέρα, πρέπει να βρούμε ένα μοντέλλο ρευστό με πολύ χαμηλό κινητικό ιξώδες και υψηλή ταχύτητα ήχου. Αυτό είναι σχεδόν αδύνατο λόγω κόστους και ασφάλειας, καθόσον υδρογόνο αέριο είναι υποψήφιο. Εν γένει και στο τούνελ χρησιμοποιούμε αέρα, αλλά προσπαθούμε να επηρεάσουμε τις ιδιότητες του αερίου με την θερμοκρασία και την πίεση, αλλά δέν είναι ικανό να αντισταθμίσει τα διαφορετικά γεωμετρικά μήκη. Έτσι δεν είναι δυνατόν να έχουμε τον ίδιο αριθμό *Reynolds*, αλλά να έχουμε

μόνο τον ίδιο αριθμό *Mach*. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να επεκτείνουμε τα πειραματικά αποτελέσματα από την περιοχή του Re_m για το μοντέλλο στην περιοχή του Re για το πρωτότυπο που μπορεί να διαφέρουν κατά μία τάξη μεγέθους. Αυτό απαιτεί και μια εκτίμηση για την αβεβαιότητα στην γραφική επέκταση. Είναι προφανές ότι η επέκταση αυτή θα συνεπικουρηθεί και από την αριθμητική λύση των υδροδυναμικών εξισώσεων. Συχνά τα πειραματικά αποτελέσματα στο μοντέλλο μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο πρωτότυπο και αν οι αριθμοί *Reynolds* διαφέρουν εφόσον ικανοποιούνται μερικές προϋποθέσεις. Μία είναι για μεγάλο αριθμό *Reynolds* ώστε οι ιξωδικές δυνάμεις μπορεί να παραλειφθούν και στο πρωτότυπο και στο μοντέλλο. Η ροή και στο μοντέλλο και στο πρωτότυπο να είναι στρωτή και να μην έχουμε φαινόμενα διαχωρισμού της ροής.

Στην γεωμετρική ομοιότητα, η σμίκρυνση των διαστάσεων μπορεί να εισάγει νέα φαινόμενα, που αλλάζουν ριζικά τη ροή. Π. χ. η ροή σε ένα μεγάλου μήκους και εύρους καναλιού μπορεί να είναι πολύ διαφορετική στο μοντέλλο. Η μεταφορά στο εργαστήριο μπορεί να δώσει μοντέλλο με βάθος μερικών χιλιοστών, πολύ μικρότερο απο το εύρος του οριακού στρώματος. Εδώ οι ιξωδικές δυνάμεις δημιουργούν στροβιλισμό σε όλο τον όγκο του νερού.

8.6 Σημαντικοί αδιάστατοι αριθμοί στην υδροδυναμική

Πίνακας 2

αδιάστατος αριθμός	Σύμβολο	Σχέση	αριθμητής/παρονομαστής	εφαρμογή
<i>Reynolds</i>	<i>Re</i>	$\rho LU/\mu$	$\frac{\text{αδρανειακή δύναμη}}{\text{ιξωδική δύναμη}}$	ιξωδική ροή
<i>Froude</i>	<i>Fr</i>	U/\sqrt{gL}	$\frac{\text{αδρανειακή δύναμη}}{\text{βαρυτική δύναμη}}$	
<i>Stokes</i>	<i>St</i>	$\rho gL^2/\mu U$	$\frac{\text{βαρυτική δύναμη}}{\text{ιξωδική δύναμη}}$	
<i>Weber</i>	<i>We</i>	$\rho LU^2/\sigma$	$\frac{\text{δυναμική πίεση δύναμη}}{\text{δύναμη επιφανειακής τάσης}}$	επιφανειακή τάση
<i>Mach</i>	<i>Ma</i>	U/c		
Αντίστασης	C_D	$F_D/(\rho U^2 L^2/2)$		
Πίεσης	C_P	$\Delta P/(\rho U^2/2)$		
<i>Euler</i>	<i>Eu</i>	$(\rho U^2/2)/\Delta P = 1/C_P$	$\frac{\text{δυναμική πίεση}}{\text{πίεση σε αντικείμενο}}$	ροή γύρω από αντικείμενα (8.43)
Συντ ανύψωσης	C_L	$F_{\text{ανυψ}}/(\rho U^2 L^2/2)$		
<i>Brinkman</i>	<i>Br</i>	$\mu U^2/\kappa \Delta \Theta$	$\frac{\text{Ιξωδική μεταφορά}}{\text{ροή θερμότητας}}$	Ιξωδική θέρμανση
<i>Strouhal</i>	<i>S</i>	L/UT		
<i>Capillary</i>	<i>Ca</i>	$\mu U/\sigma$	$\frac{\text{ιξωδική δύναμη}}{\text{επιφανειακή τάση}}$	τριχοειδή
<i>Cavitation</i>	<i>Q</i>	$(p - p_v)/(\rho U^2/2)$		
Λόγος Ειδικής Θερμότητας	γ	c_p/c_v	$\frac{\text{Ενθαλπία}}{\text{Εσωτερική Ενέργεια}}$	Συμπιεστή ροή
<i>Eckert</i>	<i>Ec</i>	$U^2/c_p \Delta T$	$\frac{\text{Κινητική}}{\text{Θερμική}}$	Μεταφορά θερμότητας
<i>Prandtl</i>	<i>Pr</i>	ν/κ	$\frac{\text{Διαχυτικότητα ορμής}}{\text{Διαχυτικότητα θερμότητας}}$	θερμότητας

Από τους παραπάνω αδιάστατους αριθμούς μερικούς έχουμε ήδη ορίσει. Εδώ θα προσπαθήσουμε να δόσουμε τον ορισμό και για τις υπόλοιπες, που παρουσιάζονται στις εξισώσεις διατήρησης μάζας, ορμής ενέργειας κτλ. Εδώ θα υποθέσουμε ότι έχουμε στο φυσικό πρόβλημα ένα

μικρό αριθμό κλιμάκων (μήκους, χρόνου, πυκνότητας, θερμοκρασίας), που επιρεάζουν σημαντικά τη ροή. Φυσικά μπορούμε να σκεφτούμε προβλήματα όπου λόγω γεωμετρίας έχουμε διαφορετικά μήκη κλίμακας σε κάθε κατεύθυνση, κάτι που οδηγεί σε σημαντική αύξηση του αριθμού των αδιάστατων αριθμών.

Ας αρχίσουμε από την εξίσωση συνέχειας για συμπιεστό ρευστό σε μη μόνιμη ροή

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\rho = -\rho\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$$

Ας υποθέσουμε τις κλίμακες L , T , U , ρ_0 για το μήκος, χρόνο, ταχύτητα και πυκνότητα αντίστοιχα. Εδώ θεωρούμε ότι η τοπική μεταβολή με το χρόνο σε κλίμακα T δεν είναι ίδια με τον χαρακτηριστικό χρόνο L/U λόγω της ροής. Έτσι συγκρίνοντας τους δύο όρους στο δεξιό της εξίσωσης συνέχειας, μπορούμε να ορίσουμε τον αριθμό *Strouhal* ως

$$\text{αριθμός } Strouhal \sim \frac{\text{τοπική μεταβολή} \sim \frac{\partial\rho}{\partial t}}{\text{μεταφορική μεταβολή} \sim (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\rho} \longrightarrow S = \frac{L/U}{T} \quad (8.44)$$

που είναι ένα μέτρο χρονικά μεταβατικών φαινομένων. Εάν $T \gg \frac{L}{U}$, τότε $S \ll 1$ οπότε μπορούμε να παραλείψουμε τον όρο τοπικής μεταβολής και να θεωρήσουμε ότι η ροή είναι μόνιμη.

Στή συνέχεια άς θεωρήσουμε μόνιμη ροή, ώστε η μόνη κλίμακα χρόνου είναι $\frac{L}{U}$, αλλά συμπιεστή. Στην περίπτωση αυτή θα θεωρήσουμε ότι η πυκνότητα είναι συνάρτηση της πίεσης ($\rho(P)$), η οποία με τη σειρά της μεταβάλλεται στο χώρο. Ο όρος μεταφοράς μπορεί να γραφεί ως

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\rho = (\vec{u} \cdot \frac{d\rho}{dP}\vec{\nabla})P = \frac{1}{c_s^2}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})P$$

όπου χρησιμοποίησαμε την σχέση

$$\frac{dP}{d\rho} = c_s^2$$

για την ταχύτητα του ήχου στο ρευστό c_s . Στη συνέχεια κανονικοποιώντας την πίεση ως $\frac{P}{\frac{1}{2}\rho_0 U^2} \equiv Eu$, έχουμε τον αδιάστατο αριθμό *Euler*. Μπορούμε να υπολογίσουμε τον λόγο της μεταφοράς ως προς τον ρυθμό μεταβολής όγκου του κινούμενου σωματιδίου

$$\frac{\text{όρος μεταφοράς}}{\text{ρυθμός μεταβολής όγκου}} = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\rho}{-\rho\vec{\nabla} \cdot \vec{u}} \sim \frac{\frac{1}{c_s^2}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})P}{-\rho\vec{\nabla} \cdot \vec{u}} \sim \frac{U^2}{c_s^2} Eu.$$

Εάν δε θεωρήσουμε ότι ο αριθμός $Eu \approx 1$ τότε αν ο αριθμός *Mach*, $Ma = \frac{U}{c_s} \ll 1$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το ρευστό είναι ασυμπιεστό, και η εξίσωση συνέχειας απλοποιείται ως $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$.

Εάν έχουμε ροή σε σωλήνα με λεπτό λαϊμό σε κάποιο σημείο, περιμένουμε ότι στο σημείο αυτό για να έχουμε ασυμπιεστή ροή περιμένουμε υψηλή ταχύτητα και επομένως χαμηλή πίεση. Εάν δε η πίεση στο σημείο αυτό πέσει στην πίεση ατμού (P_v) τότε έχουμε το φαινόμενο της σπηλαίωσης. Το κριτήριο για να αποφύγουμε σπηλαίωση δίνεται από τον αδιάστατο αριθμό σπηλαίωσης που ορίζεται ως

$$\text{αριθμός σπηλαίωσης } Q = \frac{P_0 - P_v}{\frac{1}{2}\rho_0 U^2}.$$

Εάν $Q \gg 1$ δεν έχουμε σπηλαίωση. Σε αντίθετη περίπτωση πρέπει να πάρουμε υπόψη τις μεγάλες και απότομες μεταβολές της πυκνότητας στο σημείο της σπηλαίωσης. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να εισάγουμε τουλάχιστον δύο επί πλέον κλίμακες μία χωρική που είναι το μέγεθος του σπηλαίου και

η δεύτερη χρονική, που είναι ο χρόνος κατάρευσης του σπηλαίου με μεγάλη ταχύτητα. Επιπλέον η πυκνότητα εκεί διαφέρει τάξεις μεγέθους από την πυκνότητα στον υπόλοιπο χώρο. Αυτό σημαίνει ότι και οι καταστατικές σχέσεις είναι αρκετά πολύπλοκες.

Ας επανέλθουμε στην εξίσωση ορμής σε ιξωδικό και συμπιεστό ρευστό. Για λόγους απλότητας θα παραλείψουμε την επίδραση της βαρύτητας και θα θεωρήσουμε ότι υπάρχει μόνο μία σημαντική κλίμακα χρόνου, αυτή που καθορίζεται από το πεδίο ταχύτητας, δηλ. U/L , ενώ έχουμε τις κλίμακες μήκους L και πυκνότητας ρ_0 . Ταυτόχρονα υπάρχει μία καταστατική σχέση που συνδέει την πυκνότητα και την πίεση $\rho(P)$.

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \mu \nabla^2 \vec{u}. \quad (8.45)$$

Ετσι η τάξη μεγέθους των τριών όρων είναι αντίστοιχα

$$\mathcal{O}\left(\frac{\rho_0 U^2}{L}\right), \quad \mathcal{O}\left(\rho_0 \frac{c_s^2}{L}\right), \quad \mathcal{O}\left(\frac{\mu U}{L^2}\right),$$

Για την βαθμίδα πίεσης χρησιμοποιήσαμε την καταστατική σχέση $\rho(P)$ και τον ορισμό της ταχύτητας του ήχου στο ρευστό από την ([:])

$$-\vec{\nabla}P = -\frac{dP}{d\rho} \vec{\nabla}\rho = -c_s^2 \vec{\nabla}\rho \longrightarrow \left(\rho_0 \frac{c_s^2}{L}\right) \vec{\nabla}'\rho'$$

και στο τελευταίο βήμα πήγαμε στις αδιάστατες ποσότητες $\vec{r} = L\vec{r}' \quad \rho = \rho_0 \rho'$

$$\frac{\text{αδρανειακή δύναμη}}{\text{βαθμίδα πίεσης}} = \frac{\rho \frac{D\vec{u}}{Dt}}{-\vec{\nabla}P} \sim \rho \mathcal{O}\left(\frac{U^2}{c_s^2}\right) \sim Ma^2 \quad (8.46)$$

$$\frac{\text{αδρανειακή δύναμη}}{\text{ιξωδική δύναμη}} = \frac{\rho \frac{D\vec{u}}{Dt}}{\mu \nabla^2 \vec{u}} \sim \mathcal{O}\left(\frac{UL}{\mu}\right) \sim Re \quad (8.47)$$

Ετσι οι δύο αδιάστατοι αριθμοί Ma και Re καθώς και ο λόγος τους καθορίζουν την δυναμική της ροής. Εάν ο αριθμός *Reynolds* είναι μεγάλος αυτό σημαίνει ότι για μεγάλο αριθμό *Mach* ο όρος του ιξώδους είναι μικρός και μπορεί να παραληφθεί όπως κάναμε στα κεφάλαια 4-5. Εκεί ταυτόχρονα παραλείψαμε την ιδιότητα μή ολίσθησης σε στερεά επιφάνεια και τυχόν απώλειες λόγω ιξώδους. Στο δε κεφάλαιο 5 πήγαμε ένα βήμα πιά πέρα και υποθέσαμε μηδενικό στροβιλισμό. Αυτό είναι λογική συνέπεια του θεωρήματος *Kelvin*. Εφόσον αρχικά δεν έχουμε στροβιλισμό, η έλλειψη ιξώδους δεν παράγει στροβιλισμό στις επιφάνειες αλλά ουτε διαχέει στροβιλισμό που πιθανόν να υπάρχει κοντά σε επιφάνειες. Η άποψη αυτή μας οδήγησε στο παρ'αδοθο πρόβλημα *d'Alembert* για τη δύναμη αντίστασης αλλά και έλλειψη ανύψωσης σε περιστρεφόμενο σώμα ή σε αεροπλάνα. Οπως αντιλήφθηκε ο *Prandtl* πρέπει να είμαστε προσεκτικοί κοντά σε επιφάνειες αλλά και όταν η ροή μας δημιουργεί διαχυμάνσεις μικρής κλίμακας. Ετσι κοντά σε επιφάνειες είναι απαραίτητο να κρατάμε τον ιξωδικό όρο που καθορίζει το οριακό στρώμα, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο 10. Ετσι η ροή δημιουργεί μια καινούργια κλίμακα μήκους που είναι το πάχος του οριακού στρώματος δ , ταυτόχρονα με άλλα σημαντικά μήκη, όπως π.χ. το μήκος της επιφάνειας $L \gg \delta$.

$$Re_\delta = \frac{\rho_0 \delta U}{\mu} \ll Re_L = \frac{\rho_0 L U}{\mu}.$$

Ετσι ο ιξωδικός όρος που έχει δεύτερη παράγωγο ως προς την κάθετο στην επιφάνεια γίνεται πολύ σημαντικός. με άλλα λόγια οι μεταβολές κάθετα στην επιφάνεια γίνονται στη μικρή κλίμακα δ . Να τονίσουμε ότι αυτό συμβαίνει διότι ο ιξωδικός όρος έχει τις υψηλότερες παραγώγους στο

χώρο. Έτσι κοντά σε περιοχές όπου ισχύει η μη ολίσθηση η ροή δημιουργεί μία νέα εσωτερική (μη γεωμετρική) κλίμακα.

Αντίστροφα αν ο αριθμός Re είναι μικρός τότε μπορούμε να παραλείψουμε την αδρανειακή δύναμη. Αυτή ήταν η περίπτωση της ερπυστικής ροής στις εφαρμογές του κεφαλαίου 6, όπου η βαθμίδα της πίεσης αντισταθμίζει την ιξωδική δύναμη. Εδώ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η χρονική κλίμακα δεν είναι $\frac{L}{U}$ αλλά καθορίζεται από άλλες παραμέτρους. Έτσι ο όρος της τοπικής μεταβολής είναι ανεξάρτητος από τον όρο λόγω μεταφοράς και θα τον κρατήσουμε, ώστε η εξίσωση ορμής γίνεται

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{u}. \quad (8.48)$$

Μάλιστα αν δεν υπάρχει ο όρος της βαθμίδας πίεσης τότε έχουμε ένα πρόβλημα διάχυσης και είναι λογικό να διαλέξουμε σαν κλίμακα χρόνου τον χαρακτηριστικό χρόνο διάχυσης, δηλ. $\tau_D = L^2/\nu$, $\nu = \mu/\rho_0$. Ταυτόχρονα για μικρή βαθμίδα πίεσης σε σχέση με την ιξωδική δύναμη, περιμένουμε ότι κλίμακα της πίεσης θα έχει μέσα τη σταθερά του ιξώδους, δηλ. $P_D = \mu U/L$. Στο ίδιο αποτέλεσμα θα φτάναμε αν βασιζόμασταν στη διαδικασία που υποδεικνύει το θεώρημα *Buckingham*. Εδώ έχουμε 6 παραμέτρους T , L , U , ρ_0 , μ και P_d . Από αυτές η μία ρ_0 μπορεί να απορροφηθεί αν διαιρέσουμε την εξίσωση *Stokes* με ρ_0 , οπότε αντί μ και P εισάγουμε τις $\nu = \mu/\rho$ και P/ρ . Μας απομένουν $\nu = 5$ ποσότητες T , L , U , ν και $P_\rho = P_d/\rho_0$. Από αυτές τρεις θεωρούνται σαν ανεξάρτητες και επιλέγουμε τις L , U , ν . Για τις άλλες δύο μπορούμε να κατασκευάσουμε αδιάστατους αριθμούς

$$\frac{T}{L^2/\nu}, \quad \frac{P/\rho}{\nu U/L},$$

που ορίζουν τις δύο κλίμακες που αναφέραμε. Ο άλλος χαρακτηριστικός χρόνος $T_t = L/U$ χαρακτηρίζει τον όρο μεταφοράς που παραλείψαμε. Να παρατηρήσουμε ότι ο λόγος των δύο χρονικών κλιμάκων είναι $\frac{T_t}{\tau_D} = \frac{LU}{\nu} \equiv Re$ ο αριθμός *Reynolds*, ο οποίος στην προσέγγιση δεν εισέρχεται στην εξίσωση *Stokes*. Είναι πιο σοφό όμως να θεωρήσουμε την εξίσωση σε αδιάστατες ποσότητες με

$$\vec{r} = L\vec{r}', \quad t = Tt', \quad \vec{u} = U\vec{u}', \quad P = P_\rho \rho_0 P',$$

όπου θεωρήσαμε ότι η πυκνότητα είναι σχεδόν σταθερή και μπορεί να απορροφηθεί σε άλλες ποσότητες ($\mu/\rho = \nu$, $P_0/\rho = P_\rho$)⁵. και $P_\rho = P_0/\rho_0$ έχει μονάδες πίεσης δια πυκνότητα. Η εξίσωση ορμής γίνεται

$$\left(\frac{U}{T}\right) \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t'} + \left(\frac{U^2}{L}\right) (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{u}' = - \left(\frac{P_\rho}{L}\right) \vec{\nabla}' P' + \left(\frac{\nu U}{L^2}\right) \nabla'^2 \vec{u}'. \quad (8.49)$$

και διαιρώντας με τον συντελεστή του ιξωδικού όρου ($\frac{\nu U}{L^2}$) έχουμε

$$\left(\frac{\tau_D}{T}\right) \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t'} + (Re) (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{u}' = - \left(\frac{P_\rho L}{\nu U}\right) \vec{\nabla}' P' + (1) \nabla'^2 \vec{u}'. \quad (8.50)$$

όπου $\tau_D = L^2/\nu$ είναι χαρακτηριστικός χρόνος διάχυσης και ο συντελεστής⁶ $C_p = \frac{P_0/\rho}{\nu U/L}$. Εάν ο αριθμός Re είναι μικρός τότε ο αδρανειακός όρος μεταφοράς παραλείπεται αλλά παραμένει ο

⁵Έτσι δεν χρησιμοποιούμε την καταστατική σχέση $\rho(P)$, εφόσον δεν έχουμε σημαντική βαθμίδα πίεσης.

⁶Εδώ δεν πρέπει να τον συγχεύουμε με τον αντίστοιχο συντελεστή πίεσης στην εξίσωση *Euler*. Εδώ ο παρονομαστής είναι η ιξωδική δύναμη.

τοπικός όρος καθόσον η κλίμακα χρόνου καθορίζεται από το ιξώδες, δηλ. $T = \tau_D$. Αυτό υποθέτει ότι ο συντελεστής C_p είναι σχετικά μικρός.

Ετσι η τάξη μεγέθους των τριών όρων σε σύγκριση με τον ιξωδικό όρο είναι αντίστοιχα

$$\mathcal{O}\left(\frac{\tau_D}{T}\right), \quad \mathcal{O}(Re), \quad \mathcal{O}(C_p),$$

Αυτό προϋποθέτει ότι έχουμε κάνει τη σωστή επιλογή κλιμάκων, και επομένως οι όροι εκτός παρενθέσεων στην (;;) είναι της $\mathcal{O}(1)$. Εάν κατά την αριθμητική επίλυση παρουσιαστούν σημαντικές διαφορές τάξης μεγέθους, αυτό σημαίνει ότι κάπου έχουμε ξεχάσει μία επίδραση που μας δίνει νέα σημαντική κλίμακα. Επίσης είναι δυνατόν σε διαφορετικές περιοχές του ρευστού διαφορετικές κλίμακες να είναι σημαντικές. Να αναφέρουμε το παράδειγμα της ροής *Stokes* γύρω από μία σφαίρα. Εκεί η παράλειψη της αδρανιακής δύναμης σημαίνει ότι ο αριθμός Re είναι πολύ μικρός. Ετσι η λύση που βρήκαμε ικανοποιεί την προσέγγιση κοντά στη σφαίρα, αλλά όχι μακριά. Εν τούτοις η δύναμη αντίστασης που υπολογίσαμε για τη σφαίρα επιβεβαιώνεται από πειράματα για μικρό αριθμό Re . Αυτό είναι λογικό διότι κοντά στην επιφάνεια της σφαίρας το ιξώδες είναι καθοριστικό. Βελτιώσεις σε αυτή τη σχέση απαιτούν να κρατήσουμε τον αδρανιακό όρο και η επόμενη διόρθωση στον συντελεστή αντίστασης (αδιάστατη δύναμη αντίστασης) είναι ανάλογη του αριθμού Re (δες Κεφ. 6).

Η δύναμη αντίστασης μπορεί να εκτιμηθεί από διαστατική ανάλυση, εάν ταυτόχρονα υποθέσουμε ότι το ιξώδες είναι καθοριστικό. Στο πρόβλημα αυτό έχουμε πέντε παραμέτρους F_d , R , U , ρ , ν τρεις από τις οποίες R , U , ρ επιλέγουμε ως βασικές. Για τις άλλες δύο F_d , ν μπορούμε να βρούμε αδιάστατες ποσότητες. Για την F_d βλέπουμε ότι $F_d R$ έχει μονάδες ενέργειας E την οποία μπορούμε να εκφράσουμε ως $E = \frac{1}{2}\rho R^3 U^2$, ενώ ο λόγος $\Pi_1 = \frac{F_d R}{E} = \frac{F_d}{\rho R^2 U^2/2} \equiv C_d$ είναι αδιάστατος και είναι ο συντελεστής αντίστασης που ορίσαμε στο Κεφ. 6. Για το ν μπορούμε να ορίσουμε την αδιάστατη ποσότητα $Pi_2 = \frac{\nu}{UR} \equiv \frac{1}{Re}$. Ετσι έχουμε την σχέση

$$\Pi_1 = \Phi(Pi_2) \longrightarrow C_d = \Phi\left(\frac{\nu}{UR}\right) \longrightarrow F_d = \rho R^3 U^2 \Phi\left(\frac{\nu}{UR}\right)$$

Για να προχωρήσουμε πρέπει να δούμε την φυσική. Στο όριο ερπυστικής ροής περιμένουμε ότι η δύναμη αντίστασης προέρχεται από τις ιξωδικές δυνάμεις που είναι ανάλογες του ν , οπότε η συνάρτηση $\Phi\left(\frac{\nu}{UR}\right) = A \frac{\nu}{UR} \equiv A \frac{1}{Re}$, όπου η σταθερά A πρέπει να προσδιοριστεί είτε από πείραμα είτε από τη λύση της εξίσωσης *Stokes* και είναι ίση με $A = 12\pi$.

8.6.1 Αδιάστατοι αριθμοί στην εξίσωση ενέργειας

Στην εξίσωση ενέργειας για ιξωδική ροή και συμπίεστη ροή εισέρχονται αρκετοί αριθμοί. Εδώ θα αναφέρουμε μερικούς μόνο. Ο αριθμός *Prandtl* ορίζεται ως

$$\text{Prandtl αριθμός } Pr = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{\nu}{\alpha}$$

όπου k η σταθερά θερμικής αγωγιμότητας και $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ είναι η θερμική διαχυσιμότητα. Ο αριθμός *Prandtl* είναι ο λόγος του ρυθμού ιξωδικής διάχυσης (διάχυση στροβιλισμού $\sim \nu$) προς την θερμική διάχυση $\sim \alpha$. Η θερμότητα διαχέεται με ρυθμό που ορίζεται από σταθερά διαχυσιμότητας k . Επίσης στροβιλισμός που δημιουργείται σε επιφάνειες διαχέεται στο ρευστό ανάλογα με την σταθερά κινητικού ιξώδους. Ο αριθμός *Prandtl* είναι περίπου 0.7 για τον αέρα και 7 για το νερό.

Ο αριθμός *Eckert* ορίζεται ως

$$\text{αριθμός } Eckert \quad Ec = \frac{U^2}{c_p \Delta T},$$

όπου U είναι μία χαρακτηριστική ταχύτητα του προβλήματος και ΔT χαρακτηριστική διαφορά θερμοκρασίας. Και οι δύο αυτοί αριθμοί εισέρχονται στη ροή *Poiseuille* μέσω παράλληλων πλακών σε διαφορετική θερμοκρασία, για την μεταβολή της θερμοκρασίας παράλληλα στα επίπεδα (δες Κεφ. 6).

8.7 Διαστατική ανάλυση της γενικευμένης ροής *Couette* – *Poiseuille* μεταξύ δύο πλακών

Ας θεωρήσουμε πάλι την ερπυστική ροή ανάμεσα σε δύο πλάκες με σταθερή βαθμίδα πίεσης $\frac{\Delta P}{\Delta x}$ και την πάνω πλάκα κινούμενη με σταθερή ταχύτητα U , χωρίς την επίδραση της βαρύτητας. Το πεδίο ταχύτητας $u_x(y)$ μπορεί εύκολα να βρεθεί από τις εξισώσεις *Navier – Stokes* με τις οριακές συνθήκες $u_x(y=0) = 0$ και $u_x(y=a) = U$, όπως είδαμε στο Κεφ. 6. Παρόλο που το πρόβλημα λύνεται αναλυτικά με τις προσεγγίσεις που αναφέραμε, εδώ θα δούμε πόσο μακριά θα πάμε με την μέθοδο διαστατικής ανάλυσης. Ο απώτερος σκοπός είναι να την επεκτείνουμε και στην περίπτωση που έχουμε βαρύτητα και η ροή γίνεται διδιάστατη, όπου η αναλυτική λύση δεν είναι δυνατή. Ας αρχίσουμε από την διατήρηση ορμής χωρίς βαρύτητα και αδρανειακή δύναμη, και τις οριακές συνθήκες για την ταχύτητα

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} + \mu \frac{d^2 u_x}{dy^2} = 0$$

$$u_x(y=0) = 0, \quad u_x(y=a) = U$$

Θα αδιαστατοποιήσουμε την εξίσωση ορμής και τις οριακές συνθήκες χρησιμοποιώντας τις αδιάστατες μεταβλητές.

$$u'_x = \frac{u_x}{U}, \quad y' = \frac{y}{a},$$

οπότε έχουμε

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} + \mu \frac{d^2 u'_x U}{d(y'a)^2} = 0 \longrightarrow \Pi + \frac{d^2 u'_x}{d(y')^2} = 0,$$

$$u'_x(y'=0) = 0, \quad u'_x(y'=1) = 1.$$

όπου ορίσαμε την αδιάστατη ποσότητα

$$\Pi = \frac{a^2}{\mu U} \frac{\Delta P}{\Delta x}$$

Έτσι μπορούμε να γράψουμε τη λύση στις αδιάστατες ποσότητες

$$u'_x = u'_x(y', \Pi)$$

και στην περίπτωση αυτή η αναλυτική μορφή είναι

$$u'_x(y') = \frac{\Pi}{2}(y' - y'^2) + y', \quad 0 \leq y' \leq 1,$$

Στην αδιάστατη μορφή είναι πια φανερό ότι λύση εξαρτάται καθοριστικά από την αδιάστατη ποσότητα Π , που είναι ο λόγος της κινητήριας δύναμης που οφείλεται στην σταθερή βαθμίδα πίεσης προς την ιξωδική δύναμη αντίστασης. Για οριακές τιμές του Π έχουμε τις περιπτώσεις

- α) Αν $\Pi \ll 1$ τότε $u'_x \approx y'$ που αντιστοιχεί στην επίπεδη ροή *Couette*, όπου η βαθμίδα πίεσης δεν είναι σημαντική.

8.7. ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗΣ ΡΟΗΣ COUETTE–POISEUILLE ΜΕΤΑΞΥ Δ'ΥΟ

- β) Αν $\Pi \gg 1$ τότε $u'_x \approx \frac{\Pi}{2}(y' - y'^2)$, που αντιστοιχεί στην επίπεδη ροή *Poiseuille*, όπου η ταχύτητα της πάνω πλάκας είναι αμελητέα.
- γ) Αν $\Pi \sim \mathcal{O}(1)$ τότε ισχύει η () που αντιστοιχεί στην επίπεδη ροή *Couette – Poiseuille*, όπου οι δύο δυνάμεις ανταγωνίζονται.

Ασχετα από την ύπαρξη αναλυτικής λύσης, η διαδικασία αδιαστατοποίησης μας δίνει τη δυνατότητα να προσεγγίσουμε πειραματικά την συνάρτηση $u'_x = u'_x(y', \Pi)$ μετριόντας $u'_x = u_x/U$ σε διάφορα σημεία $y' = y/a$ για διάφορες τιμές του Π .

Θα εκτιμήσουμε την διαδικασία της αδιαστατοποίησης στην γενίκευση του προηγούμενου προβλήματος με την επίδραση της βαρύτητας. Στην περίπτωση αυτή το πεδίο ταχύτητα είναι διδιάστατο $\vec{u} = (u_x(x, y), u_y(x, y), 0)$ και περιοριζόμενοι σε ασυμπίεστη ροή, έχουμε από τις εξισώσεις συνέχειας και ορμής

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + \rho g,$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right).$$

Λύση των εξισώσεων θα μας δώσει το πεδίο ταχύτητας $u_x(x, y, t)$, $u_y(x, y, t)$ και την πίεση $p(x, y, t)$ σαν συνάρτηση των x, y, t , και των αδιάστατων σταθερών του προβλήματος. Στο πρόβλημα έχουμε έξι παραμέτρους L, a, ρ, μ, g, U μία από τις οποίες U εισάγεται από τις οριακές συνθήκες στο άπειρο. Τρεις από αυτές L, U, μ θεωρούνται βασικές και για τις άλλες τρεις εισάγουμε αδιάστατους αριθμούς. Το ποιοί θα είναι αυτοί θα αφήσουμε να βγει από τη διαδικασία αδιαστατοποίησης. Επειδή έχουμε δύο μήκη L και a διαφορετικά στις δύο κατευθύνσεις, που είναι οι κλίμακες μεταβολών⁷, εισάγουμε τις αδιάστατες συντεταγμένες

$$x' = \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y}{a}$$

Εισάγουμε επίσης αδιάστατες συνιστώσες ταχύτητας

$$u'_x = \frac{u_x}{U}, \quad u'_y = \frac{u_y}{U},$$

Για τον χρόνο έχουμε δύο επιλογές

$$\frac{L}{U} \quad \text{και} \quad \frac{L^2}{\nu}$$

για κλίμακα χρόνου. Το ποιά θα επιλέξουμε εξαρτάται από το αν η ροή μας καθορίζεται από τον αδρανειακό όρο μεταφοράς (όπως θεωρούμε εδώ) ή από την διάχυση στροβιλισμού. Για την πίεση οι χαρακτηριστικές κλίμακες είναι

$$\frac{\mu U}{L} \quad \text{και} \quad \rho U^2.$$

Για ιξωδική ροή σε περιορισμένο χώρο η πρώτη επιλογή είναι φυσική για την κλίμακα πίεσης, καθόσον η βαθμίδα πίεσης αντισταθμίζει την ιξωδική αντίσταση. Έτσι εισάγουμε τις αδιάστατες ποσότητες χρόνου και πίεσης

⁷Στην περίπτωση αυτή οι κλίμακες εισάγονται από τα όρια, και θεωρούμε ότι άλλα μήκη που μπορούμε να ορίσουμε δεν παίζουν σημαντικό ρόλο.

$$t' = \frac{t}{L/U} \quad \text{και} \quad p' = \frac{p}{\mu U/L}$$

και έχουμε

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial u'_x}{\partial x'} + \frac{\partial u'_y}{\partial y'} &= 0, \quad \epsilon = \frac{a}{L}, \\ Re \left(\frac{\partial u'_x}{\partial t'} + u'_x \frac{\partial u'_x}{\partial x'} + \frac{1}{\epsilon} u'_y \frac{\partial u'_x}{\partial y'} \right) &= -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \left(\frac{\partial^2 u'_x}{\partial x'^2} + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial^2 u'_x}{\partial y'^2} \right) + \frac{\rho g L^2}{\mu U}, \\ Re \left(\frac{\partial u'_y}{\partial t'} + u'_x \frac{\partial u'_y}{\partial x'} + \frac{1}{\epsilon} u'_y \frac{\partial u'_y}{\partial y'} \right) &= -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial p'}{\partial y'} + \left(\frac{\partial^2 u'_y}{\partial x'^2} + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial^2 u'_y}{\partial y'^2} \right), \end{aligned}$$

όπου ορίσαμε τους αδιάστατους αριθμούς

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu}, \quad St = \frac{\rho g L^2}{\mu U}$$

που είναι αντίστοιχα ο αριθμός *Reynolds* και *Stokes*.

Είναι προφανές ότι αναλυτική λύση των παραπάνω εξισώσεων είναι αδύνατη, ακόμη και αν χρησιμοποιήσουμε φυσικά επιχειρήματα για να παραλείψουμε κάποιους όρους. Αυτό όμως που μπορούμε να πουμε με τη διαστατική ανάλυση είναι ότι οι αδιάστατες ποσότητες ταχύτητας και πίεσης δίνονται από τις παρακάτω συναρτήσεις

$$\vec{u}' = \vec{u}'(x', y', t' Re, St, \epsilon), \quad p' = p'(x', y', t' Re, St, \epsilon),$$

την μορφή των οποίων μπορούμε να προσεγγίσουμε με πειραματικές μετρήσεις για διάφορες τιμές των αδιάστατων αριθμών.

8.8 Ασκήσεις

1. Αναπτύξτε μία σχέση που συνδέει την δύναμη αντίστασης ενός αντικειμένου μέσα σ' ένα κινούμενο υγρό συναρτήσει όλων των παραμέτρων που είναι σημαντικές (μήκος αντικειμένου (L), ταχύτητα υγρού (U), πυκνότητα υγρού (ρ), και συντελεστής ιξώδους (μ). Η λύση είναι μονοσήμαντη. Ποιό είναι το φυσικό νόημα στην περίπτωση δύο η περισσότερων λύσεων;
2. Χρησιμοποιώντας την αρχή της διαστατικής ομογένειας, ορίστε τις σχέσεις ανάμεσα στα παρακάτω.
 - α) την περίοδο ταλάντωσης T ενός επιπλέοντος κυλίνδρου διαμέτρου d σε όρθια θέση, αν η μάζα του κυλίνδρου είναι m και το ειδικό βάρος του υγρού ρg
 - β) Την εκροή Q (όγκο/χρόνο) ενός υγρού με ιξώδες μ μέσω ενός σωλήνα μήκους L με ομογενή κυκλική διατομή και επιμήκη βαθμίδα πίεσης $\Delta P/\Delta z$.
 - γ) Την δύναμη αντίστασης F_d σε μία σταγόνα ακτίνας R που πέφτει με ταχύτητα U μέσω αέρα με δυναμικό συντελεστή ιξώδους μ .
 - δ) Την ταχύτητα επιφανειακών (*capillary*) κυμάτων c μήκους κύματος L στην επιφάνεια ενός υγρού πυκνότητας ρ και επιφανειακής τάσης σ .
3. Χρησιμοποιώντας διαστατική ομογένεια, ορίστε την σχέση ανάμεσα στην ταχύτητα των επιφανειακών υγρών κυμάτων μήκους κύματος όταν
 - α) η βαρύτητα είναι σημαντική.
 - β) η επιφανειακή τάση είναι σημαντική.
4. α) Ορίστε τον αριθμό *Reynolds* και εξηγήστε το φυσικό του νόημα.
β) Ένας τυπικός μεσο-ωκεάνειος στρόβιλος διαμέτρου $D = 100$ km χαρακτηρίζεται από ταχύτητα 0.3 m/sec. Καθορίστε αν η ροή είναι στρωτή η τυρβώδης, όταν η διαχωριστική τιμή της σταθεράς του Ρεφνολδς είναι 2.000.
5. Ο αριθμός *Froude* χαρακτηρίζει τον λόγο της δύναμης αδράνειας προς την βαρύτητα. Ένα πλοίο κινείται μεσω περιοχής όπου έχουμε κύματα με μήκος κύματος 100 m. Αν η ταχύτητα είναι 5 m/sec, βρείτε την τιμή του αριθμού *Froude*.
6. Βρείτε την σχέση διασποράς για επιφανειακά κύματα βαρύτητας. Σχεδιάστε την ταχύτητα φάσης. Εάν έχουμε και επιφανειακή τάση βρείτε με διαστατική ανάλυση το κρίσιμο μήκος κύματος. Είναι ανω η κάτω όριο; Σχεδιάστε την ταχύτητα ομάδας.
7. Εστω ότι θέλουμε να μετρήσουμε το ιξώδες χρησιμοποιώντας μία
 - α) Ελεύθερη πίπτουσα σφαίρα
 - β) δύο οριζόντιες πλάκες που γλιστρούν με σταθερή ταχύτητα
 Για τις δύο αυτές περιπτώσεις
 - (i) δώστε τις σημαντικές φυσικές ιδιότητες και παραμέτρους.
 - (ii) Βρείτε τις αδιάστατες μεταβλητές
8. Βρείτε τούς αδιάστατους λόγους των
 - α) κεντρομόλου δύναμης και της δύναμης δριολις (mfU). Αυτός ο λόγος ονομάζεται αριθμός *Rossby*. ($f = 2\Omega \sin \phi$) είναι η *Coriolis* παράμετρος όπου Ω είναι η γωνιακή ταχύτητα της περιστροφής της γης και ϕ είναι το γεωγραφικό πλάτος.
 - β) της δύναμης αντίστασης (ιξώδους) προς την δύναμη Αυτός ο λόγος ονομάζεται αριθμός *Eckman*.

9. Ένα βυθισμένο υποβρύχιο κινείται με 15 m/sec . Ποια πρέπει να είναι η κατάλληλη ταχύτητα σε ένα μοντέλλο 20 φορές μικρότερο:
α) στο νερό· β) στον αέρα·
10. Στη μελέτη ενός μοντέλλου βρέθηκε ότι και η βαρύτητα και ιξώδη φαινόμενα είναι σημαντικά. Εάν το μοντέλλο λειτουργήσει σε νερό ενώ το πρωτότυπο θα χρησιμοποιηθεί στον αέρα και τα δύο σε 20^{th} ποιο είναι το μόνο κατάλληλο χαρακτηριστικό μήκος του μοντέλλου σε σχέση με το πρωτότυπο·

8.9 Navier – Stokes

Οι εξισώσεις *Navier – Stokes* είναι αρκετά σύνθετες και η εύρεση της πιο γενικής λύσης (αριθμητικά) δεν οδηγεί στην κατανόηση των φυσικών μηχανισμών που οδηγούν τη ροή αλλά και την ταξινόμηση της με βάση σημαντικά χαρακτηριστικά. Έτσι προσεγγίσεις που ισχύουν υπό ορισμένες προϋποθέσεις είναι πιο χρήσιμες, διότι και οι κινητήριες δυνάμεις είναι ορατές αλλά και η ροή έχει αναμενόμενα χαρακτηριστικά, εφόσον οι προσεγγίσεις ισχύουν. Για τις προσεγγίσεις χρειαζόμαστε μια διαδικασία ώστε να δούμε τι είναι μικρό και παραλειψίμο και τι μεγάλο και σημαντικό. Για το σκοπό αυτό πρέπει να βρούμε τις κατάλληλες κλίμακες φυσικών μεγεθών και κλίμακες μεταβολής. Κανονικοποίηση ως προς αυτές τις κλίμακες μας οδηγεί σε αδιάστατους αριθμούς που μας υποδεικνύουν τους σημαντικούς όρους σε μία εξίσωση, αλλά και τις διαφορικές εξισώσεις της υδροδυναμικής σε αδιάστατη μορφή. Σαν παράδειγμα θα επανέλθουμε στην ασυμπίεστη ροή με σταθερή πυκνότητα. Η βασική ιδέα είναι να επιλέξουμε τις χαρακτηριστικές κλίμακες του προβλήματος π.χ. μήκους, χρόνου κτλ. Π.χ. εάν έχουμε ένα εμπόδιο μεγέθους L στην ελεύθερη ροή ενός ρευστού τότε περιμένουμε ότι αυτή είναι η χαρακτηριστική κλίμακα μήκους, και οποιεσδήποτε αλλαγές συμβαίνουν στον χώρο π.χ. στο πεδίο ταχύτητας, αυτές συμβαίνουν στην κλίμακα L . Εάν δε η ασυμπιεστική ταχύτητα του ρευστού είναι u_0 , τότε έχουμε και τον χαρακτηριστικό χρόνο $\tau = \frac{L}{u_0}$.

Για την ροή ανέμου πάνω από λόφο ή την κίνηση πλοίου στη θάλασσα το χαρακτηριστικό μήκος L είναι προφανές. Για άλλες περιπτώσεις οδηγούμαστε από φυσική διαίσθηση. Η περίοδος των κυμάτων, η διάρκεια του ανέμου ή της κίνησης του πλοίου είναι πιθανές κλίμακες χρόνου. Εάν η βαρύτητα αναμένεται να είναι σημαντική, τότε η επιτάχυνση της βαρύτητας μπορεί να θεωρηθεί ως κατάλληλη κλίμακα δύναμης όγκου ανά μονάδα μάζας.

Εχοντας επιλέξει τις κατάλληλες κλίμακες εισάγουμε τις αδιάστατες μεταβλητές,

$$\vec{u}' = \vec{u}/U, \quad t' = t/T, \quad \vec{r}' = \vec{r}/L, \quad p' = p/P, \quad \vec{f}' = \vec{f}/g \quad (8.51)$$

όπου η κλίμακα πίεσης⁸ P είναι ακόμη άγνωστη. Η εξίσωση *Navier – Stokes* γίνεται

$$\nabla' \cdot \vec{u}' = 0 \quad (8.52)$$

$$\frac{L}{TU} \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t'} + \vec{u}' \cdot \nabla' \vec{u}' = -\frac{P}{\rho U^2} \nabla' p' + \frac{gL}{U^2} \vec{f}' + \frac{\nu}{UL} \nabla'^2 \vec{u}'. \quad (8.53)$$

Επειδή τα L, T είναι χαρακτηριστικές κλίμακες μήκους και χρόνου, οι παραγωγίσεις ως προς τις αδιάστατες ποσότητες είναι της τάξης της μονάδας,

$$\frac{\partial}{\partial x'} = O(1) \quad \frac{\partial}{\partial t'} = O(1)$$

Σε κάθε όρο υπάρχει και ένας αδιάστατος αριθμός, ενώ με διαίρεση ο συντελεστής του πιο σημαντικού όρου είναι μονάδα. Έτσι οι υπόλοιποι συντελεστές μας δίνουν την σχετική σημασία

⁸Στην πράξη η βαθμίδα πίεσης εισέρχεται και είναι σημαντική.

αυτού του όρου με τον πιο σημαντικό. Η (8.53) είναι σε μορφή όπου ο πιο σημαντικός όρος είναι ο αδρανειακός όρος μεταφοράς. Έτσι η συνεισφορά του όρου της βαθμίδας πίεσης δίνεται από το λόγο $P/\rho U^2$, η στιγμιαία επιτάχυνση από L/TU , της βαρύτητα από gL/U^2 και των ιξωδικών δυνάμεων από ν/U^2 , κτλ. Οι αδιάστατοι αυτοί αριθμοί αναφέρονται και με ονόματα. Έτσι

$$\begin{aligned}\frac{L}{TU} &= \text{Strouhalαριθμός} = St \sim \frac{\text{τοπική επιτάχυνση}}{\text{μεταφορική επιτάχυνση}} \\ \frac{UL}{\nu} &= \text{Reynoldsαριθμός} = Re \sim \frac{\text{αδράνεια}}{\text{ιξωδική δύναμη}} \\ \frac{U^2}{gL} &= (\text{Froudeαριθμός})^2 = Fr^2 \sim \frac{\text{αδράνεια}}{\text{βαρύτητα}}\end{aligned}$$

Έτσι μπορούμε να ξεχωρίσουμε δύο σημαντικές κατηγορίες ροής και να κάνουμε τις παρακάτω προσεγγίσεις :

(i) Ροή υψηλού αριθμού *Reynolds*:

Θεωρούμε ότι οι συντελεστές των όρων τοπικής επιτάχυνσης, βαθμίδας πίεσης και βαρύτητας είναι της ίδιας τάξης με την μεταφορική αδράνεια, δηλ τάξης μονάδας, ενώ

$$Re = \frac{UL}{\nu} \gg 1. \quad (8.54)$$

που μπορεί να ισχύει για μικρό ιξώδες, μεγάλη ταχύτητα ή μεγάλο σώμα. Αυτό μας επιτρέπει να παραλείψουμε τον ιξωδικό όρο, οπότε η εξίσωση συνέχειας και εξίσωση διατήρησης της ορμής γίνονται

$$\nabla' \cdot \vec{u}' = 0 \quad (8.55)$$

$$\frac{L}{TU} \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t'} + \vec{u}' \cdot \nabla' \vec{u}' = -\frac{P}{\rho U^2} \nabla' p' + \frac{gL}{U^2} \vec{f}'. \quad (8.56)$$

Οι εξισώσεις στις αρχικές μεταβλητές είναι

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (8.57)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \rho \vec{f}. \quad (8.58)$$

που είναι η εξίσωση *Euler* για ανιξωδική ασυμπίεστη ροή με σταθερή πυκνότητα.

Εάν επιπλέον ο αριθμός *Strouhal* είναι επίσης μικρός, δηλ. η κλίμακα χρόνου τοπικής μεταβολής είναι μεγάλη σε σχέση με την L/U , μπορούμε να θεωρήσουμε τη ροή ως μόνιμη. Έτσι για μόνιμη και ανιξωδική ροή η κλίμακα της δυναμικής πίεσης καθορίζεται από $P/\rho U^2 = O(1)$, δηλ. η κλίμακα είναι της τάξης του ρU^2 . Αυτό είναι απαραίτητο για να έχουμε επιτάχυνση καθόσον η δύναμη της βαρύτητας δίνει μόνο κάθετη συνιστώσα. Επίσης αφού παραλείψαμε τις ιξωδικές δυνάμεις οι οριακές συνθήκες σε επιφάνειες είναι μόνο για την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας,

$$\vec{u} \cdot \vec{n} \text{ στην επιφάνεια} = \vec{U} \cdot \vec{n} \text{ στην επιφάνεια..} \quad (8.59)$$

(ii) Ροή Χαμηλού αριθμού *Reynolds*:

Αν $Re = \frac{UL}{\nu} \ll 1$ είτε για χαμηλή ταχύτητα, ή μικρό σώμα, ή μεγάλο ιξώδες, τότε οι ιξωδικές δυνάμεις είναι οι πιο σημαντικές στην εξίσωση ορμής, ενώ οι δυνάμεις αδράνειας (επιτάχυνση) είναι αμελητέες. Εάν επιπλέον δεν έχουμε βαρύτητα τότε οι ιξωδικές δυνάμεις θα εξισορροπηθούν από την βαθμίδα πίεσης. Έτσι η κλίμακα της πίεσης ικανοποιεί

$$\frac{P}{\rho U^2} = O\left(\frac{\nu}{UL}\right) \ll 1$$

ή

$$P = O(\nu U/L). \quad (8.60)$$

Έτσι οι κλίμακες πίεσης είναι πολύ διαφορετικές για ροή χαμηλού και υψηλού αριθμού *Reynolds*. Έτσι η εξίσωση ορμής γίνεται

$$\frac{UL}{\nu} \frac{L}{TU} \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t'} + \frac{UL}{\nu} \vec{u}' \cdot \nabla' \vec{u}' = -\nabla' p' + \frac{UL}{\nu} \frac{gL}{U^2} \vec{f}' + \nabla'^2 \vec{u}'. \quad (8.61)$$

Για μικρό αριθμό *Reynolds*, μία προσέγγιση τής (8.61) είναι

$$0 = -\nabla' p' + \nabla'^2 \vec{u}', \quad (8.62)$$

και σε διαστατική μορφή,

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (8.63)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{q}, \quad (8.64)$$

που είναι οι εξισώσεις *Stokes* που χρησιμοποιήσαμε για ερπυστική ροή στο Κεφ. 6. Εδώ σε επιφάνειες έχουμε τη οριακή συνθήκη μη ολίσθησης

$$\vec{u} \text{ επιφάνεια} = \vec{U} \text{ επιφάνεια} . \quad (8.65)$$

Οι αδιάστατοι αυτοί αριθμοί χαρακτηρίζουν την μορφή της ροής και είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι για την ανάπτυξη μοντέλων της ροής σε μικρότερες κλίμακες στο εργαστήριο.