Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 4

Δυναμική ανιξωδικού ρευστού

4.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο περιοριστήκαμε στην κινητική περιγραφή της ροής. Αυτό είχε σαν προϋπόθεση τη γνώση (σε αναλυτική η αριθμητική μορφή) του πεδίου της ταχύτητας σε κάθε σημείο του χώρου. Αλλά δεν αναφερθήκαμε ακόμη στίς δυνάμεις που μαζί με τις οριακές συνθήκες επιρρεάζουν την κίνηση του ρευστού. Για ανιξωδικό ρευστό δεν έχουμε δυνάμεις τριβής αλλά μόνο δυνάμεις λόγω πίεσης και βαρύτητας. Η εξίσωση διατήρησης της ορμής είναι ο συνδετικός κρίκος, και βρίσκεται εξισώνοντας ανά μονάδα όγκου τις εξωτερικές δυνάμεις με τις αδρανειακές δυνάμεις (πυκνότητα επι υλική επιτάχυνση). Για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε σχέσεις οι οποίες είναι τοπικές και δίνονται από διαφορικές εξισώσεις. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το διανυσματικό διαφορικό λογισμό ώστε οι αντίστοιχες μαθηματικές εκφράσεις να είναι σύντομες. Δεν συμβαίνει το ίδιο π.χ αν αναπτύξουμε την εξίσωση διατήρησης της ορμής σε συνιστώσες. Τότε έχουμε πολύπλοκες και μεγάλες εκφράσεις, ιδιαίτερα όταν χρησιμοποιούμε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες. Από την άλλη πλευρά το ξετύλιγμα σε συνιστώσες έχει και ένα κέρδος για τον αναγνώστη, και γι αυτό συνιστάται η διερεύνηση. Μας φανερώνει την πολύπλοκη συμπεριφορά στη δυναμική των ρευστών, ενώ ταυτόχρονα υποδεικνύει ποιοί είναι οι σημαντικοί όροι για τη ροή υπό τις συγκεκριμένες οριακές συνθήκες. Σε αρκετά πραγματικά προβλήματα μας ενδιαφέρει η κατανομή της ταχύτητας του ρευστού καθώς κινείται στο χώρο στον οποίο είναι δυνατόν να παρεμβάλλονται και εμπόδια. Το τελευταίο έχει ενδιαφέρον για τη ροή γύρω από πλοία, αεροπλάνα, κτήρια ή δια μέσω καναλιών, αγωγών, ελίκων κτλ.

Εν γένει πρέπει να γνωρίζουμε τις τρείς συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού, αλλά και άλλες παραμέτρους όπως η πίεση η πυκνότητα, η θερμοκρασία του ρευστού, οι οποίες μπορεί να είναι συναρτήσεις του χώρου και του χρόνου. Για τον προσδιορισμό τους χρειαζόμαστε σχέσεις οι οποίες περιγράφουν την τοπική μεταβολή τους. Αυτές είναι

- Η εξίσωση συνέχειας που είναι ισοδύναμη με την αρχή διατήρησης της μάζας (όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο).
- Τη διανυσματική εξίσωση για τη διατήρηση της ορμής ενός στοιχείου ρευστού.
- Την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας του ρευστού σωματιδίου.
- Την καταστατική εξίσωση που συνδέει την πυκνότητα με την πίεση και τη θερμοκρασία.

Η τελευταία εξίσωση εν γένει δεν είναι διαφορική. Στο κεφάλαιο 3 είδαμε την εξίσωση συνέχειας και στο παρόν κεφάλαιο θα δούμε τους άλλους δύο νόμους διατήρησης στην περιγραφή *Euler*. Στο Κεφ. 3 είδαμε επίσης πως μπορούμε να περιγράψουμε το ρυθμό μεταβολής της ορμής ανά μονάδα μάζας (δηλ. την επιτάχυνση) ενός ρευστού σωματιδίου κατά την κίνησή του συναρτήσει του πεδίου ταχύτητας. Για την εξίσωση διατήρησης της ορμής αυτό που απομένει να βρούμε είναι τις δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σωματίδιο, και πως περιγράφονται συναρτήσει των φυσικών παραμέτρων. Εδώ θα περιοριστούμε σε ανιξωδική ροή όπου στις δυνάμεις δεν εισέρχεται το πεδίο ταχύτητας. Θα δούμε όμως στο τέλος του κεφαλαίου, ότι αν θέλουμε να περιγράψουμε την ροή σε περιστρεφόμενα συστήματα πρέπει να εισάγουμε ψευδοδυνάμεις που εξαρτώνται από την ταχύτητα, όπως είναι η δύναμη *Coriolis*.

Θα εξετάσουμε επίσης τη διατήρηση ενέργειας για ανιξωδική ροή και θα δούμε ότι υπό ορισμένες προϋποθέσεις είναι ισοδύναμη με την αρχή *Bernoulli*. Στην περίπτωση αυτή το έργο που γίνεται από τη βαθμίδα της πίεσης πηγαίνει στην αύξηση της δυναμικής και κινητικής ενέργειας του κέντρου μάζας του ρευστού σωματιδίου. Σε μία ροή όμως το ρευστό έχει και στροβιλισμό και πρέπει να συνυπολογίσουμε το έργο του στροβιλισμού, το οποίο εξαρτάται από τη διαδρομή του ρευστού. Πρέπει λοιπόν να γενικεύσουμε την εξίσωση *Bernoulli* λόγω της ύπαρξης στροβιλισμού.

Στην ιδανική ροή, που θα μελετήσουμε στο παρόν κεφάλαιο, θα παραλείψουμε το ιξώδες. Η προσέγγιση αυτή είναι αρκετά ικανοποιητική όταν το ρευστό είναι νερό σε συνηθισμένες συνθήκες ροής. Είδαμε ότι το κριτήριο για να παραλείψουμε τις δυνάμεις ιξώδους, είναι ο αριθμός *Reynolds*

$$Re = \frac{u_0 L}{\nu}$$

να είναι μεγάλος. Π.χ. για ροή ταχύτητας $u_0 = 1m/sec$ γύρω από σφαίρα διαμέτρου $L = 1m$ με το κινητικό ιξώδες του νερού $\nu = 10^{-6} m^2/sec$ έχουμε $Re = 10^6 \gg 1$. Ετσι η ροή μας είναι ιδανική εφόσον είμαστε μακριά από επιφάνειες, τουλάχιστον για κάποιο χρονικό διάστημα. Στην επιφάνεια της σφαίρας υπάρχει ένα λεπτό στρώμα στο οποίο η επίδραση του ιξώδους είναι σημαντική. Το πάχος του στρώματος αυτού, όπως θα δούμε στο Κεφ. 8, ελαττώνεται με την αύξηση του αριθμού *Reynolds*. Στο ιδανικό ρευστό θεωρούμε επίσης μηδενική αγωγιμότητα θερμότητας.

4.2 Διατήρηση ορμής: Εξίσωση *Euler*

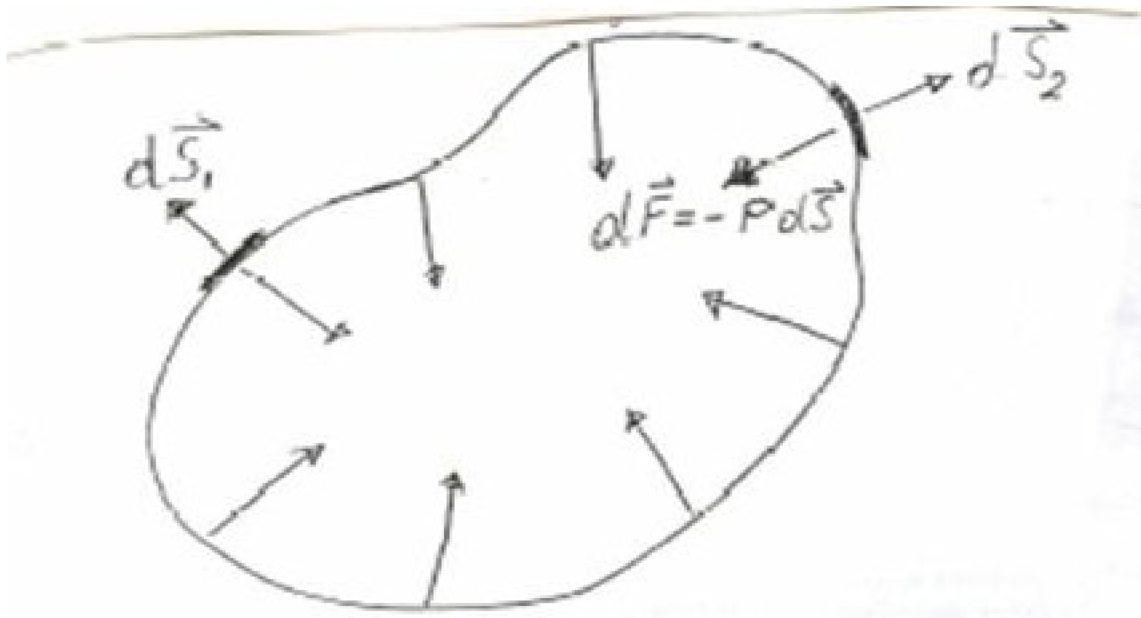
Θεωρούμε έναν όγκο V που περικλείεται από μία κλειστή επιφάνεια S. Η ολική δύναμη που ασκείται στον όγκο αυτό μέσω της επιφάνειας από το γειτονικό ρευστό (δες Σχ. 4.1) είναι:

$$-\oint_S P d\vec{S}, \tag{4.1}$$

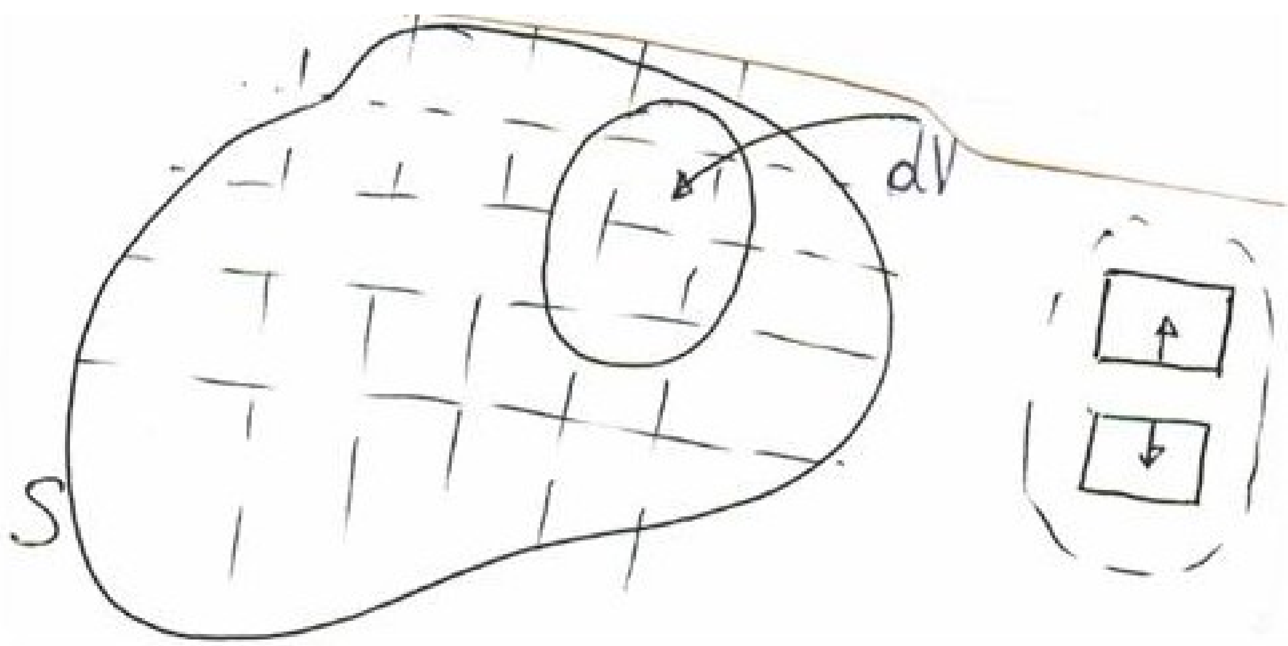
όπου $P(\vec{r})$ είναι η πίεση στο σημείο $\vec{r}$ στην επιφάνεια dS. Η πίεση εξαρτάται μόνο από το σημείο $\vec{r}$ και όχι από τον προσανατολισμό της επιφάνειας που περνά από το σημείο αυτό. Η δύναμη λόγω της πίεσης για ένα ανιξωδικό ρευστό είναι κάθετη στην επιφάνεια[1] $d\vec{S}$ και επομένως αλλάζει προσανατολισμό[2] σε διαφορετικά σημεία πάνω στην επιφάνεια S. Αν θεωρήσουμε ένα στοιχείο επιφάνειας $d\vec{S}$ η δύναμη που ασκείται σ' αυτό από το εξωτερικό υγρό είναι $-Pd\vec{S}$, όπου το "-" πρόσημο μπαίνει γιατί η κατεύθυνση του $d\vec{S}$ είναι προς το εξωτερικό μέρος του όγκου ενώ η δύναμη της πίεσης προς το εσωτερικό. Το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων σε όλη την επιφάνεια γίνεται το ολοκλήρωμα στην (4.1).

[1] Ενα στοιχείο επιφάνειας ορίζεται από ένα διάνυσμα $d\vec{S}$ με μέτρο dS και κατεύθυνση την κάθετο στην επιφάνεια και πρός τα έξω.

[2] Γίνεται λοιπόν φανερό ότι η συμβολική σχέση για την ολική δύναμη υποκρύπτει τη δυσκολία στον αναλυτικό υπολογισμό της. Όντως, μόνο για συμμετρικές περιπτώσεις μπορούμε να μετατρέψουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα σε απλή μορφή. Αυτό θα συμβεί για συμμετρικά σχήματα όπως π.χ. κύβο, κύλινδρο, σφαίρα κ.τ.λ..



Σχήμα 4.1: Σχ. 4.1. Δυνάμεις πίεσης μέσω της επιφάνειας S που περικλείει τον όγκο V.



Σχήμα 4.2: Σχ. 4.2. Διαίρεση του όγκου V σε στοιχειώδεις όγκους dV.

Επειδή η ορμή ορίζεται για τη μάζα σε κάποιο όγκο συστήματος είναι χρήσιμο να μετατρέψουμε και το επιφανειακό ολοκλήρωμα στις δυνάμεις σε ολοκλήρωμα στον όγκο V, που περικλείεται από την επιφάνεια S. Αυτό επιτυγχάνεται χωρίζοντας τον όγκο V σε στοιχειώδεις κύβους (δες Σχ. 4.2) όγκου dV. Για κάθε στοιχειώδη κύβο έχουμε δεί ότι το άθροισμα των επιφανειακών δυνάμεων πίεσης στα τοιχώματα είναι ίσο με $-\vec{\nabla}P\ dV$. Προσθέτοντας για όλους τους κύβους, οι επιφανειακές δυνάμεις που ασκούνται στην εξωτερική επιφάνεια S μας δίνουν το επιφανειακό ολοκλήρωμα της (4.1), ενώ οι δυνάμεις στις εσωτερικές γειτονικές ενδοεπιφάνειες αλληλοαναιρούνται. Ισοδύναμα μπορούμε να προσθέσουμε για κάθε όγκο τα στοιχειώδη ολοκληρώματα και να πάρουμε το ολοκλήρωμα στον όγκο της βαθμίδας πίεσης. Και το άθροισμα αυτό είναι διανυσματικό καθώς η βαθμίδα μεταβάλλεται από κύβο σε κύβο σε μέτρο η προσανατολισμό, ενώ την θεωρούμε σταθερή στον όγκο dV. Έτσι έχουμε από το θεώρημα *Gauss*:

$$-\oint_S Pd\vec{S} \;\; = \;\; -\int \vec{\nabla}PdV, \tag{4.2}$$

για την ολική δύναμη σε ένα σύστημα οιουδήποτε όγκου. Αυτό θα το εκμεταλευτούμε στην παράγραφο 4.10 όπου θα μελετήσουμε τη διατήρηση ορμής για μακροσκοπικούς όγκους. Εδώ όμως θα περιοριστούμε να γράψουμε την εξίσωση διατήρησης ορμής για στοιχειώδη όγκο.

Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να δώσουμε μία άλλη περιγραφή της ολικής δύναμης. Εάν έχουμε ένα στοιχείο όγκου dV τότε το περιβάλλον υγρό ασκεί στο στοιχειώδη όγκο δύναμη ίση με $-dV\vec{\nabla}P$. Με άλλα λόγια η δύναμη $-\vec{\nabla}P$ δρα ανά μονάδα όγκου στο υγρό. Έτσι η <u>ίδια</u> δύναμη μπορεί να περιγραφεί είτε ότι ασκείται μέσω της επιφάνειας, σαν πίεση (δύναμη επιφάνειας) είτε ως $\vec{\nabla}P$ σαν δύναμη ανά μονάδα όγκου. Στην δεύτερη περίπτωση πρέπει να ολοκληρώσουμε στον όγκο. Η δεύτερη μορφή όμως είναι απλή αν αναφερόμαστε σε στοιχειώδη όγκο.

Η δεύτερη περιγραφή μας δίνει την δυνατότητα να γράψουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις του νόμου του Νεύτωνα $m\vec{a} = \vec{F}$. Η μάζα που περιέχεται στον όγκο dV είναι $dm = \rho dV$, ενώ η αντίστοιχη επιτάχυνση είναι η υλική παράγωγος της ταχύτητας $\frac{D\vec{u}}{Dt}$. Γράφοντας την εξίσωση κίνησης για τη μάζα dm υπό την επίδραση της δύναμης $-dV\vec{\nabla}P$ έχουμε:

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}P. \tag{4.3}$$

πυκνότητα · επιτάχυνση = δύναμη ανά μονάδα όγκου

Η επιτάχυνση του σωματιδίου πρέπει να υπολογιστεί από το πεδίο ταχύτητας στην περιγραφή *Euler* και όπως είδαμε έχει δύο συνεισφορές: (α) την τοπική μεταβολή του πεδίου ταχύτητας και (β) τη μεταβολή της ταχύτητας λόγω της μεταφοράς σωματιδίων με διαφορετική ταχύτητα καθώς κινείται το ρευστό ¨σωματίδιο¨. Αυτό φαίνεται πιο καθαρά αν αντικαταστήσουμε για την <u>υλική</u> παράγωγο, οπότε έχουμε:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} \;\; = \;\; -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho}. \tag{4.4}$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται εξίσωση *Euler*(διατυπωθηκε το 1755) και είναι μία από τις βασικές εξισώσεις της υδροδυναμικής. Η (4.4) μας λέει ότι η δύναμη ανά μονάδα μάζας είναι ίση με την επιτάχυνση, και ισχύει ακόμη και για συμπιεστά ρευστά, οπότε έχουμε μεταβολή της πυκνότητας στο χώρο ή στο χρόνο. Τότε η μεταβολή της πυκνότητας μάζας περιγράφεται από την εξίσωση συνέχειας και φυσικά εξαρτάται από το πεδίο ταχύτητας. Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να λύσουμε μαζί τις τρεις εξισώσεις του *Euler* (η (4.4) είναι διανυσματική σχέση) με την εξίσωση συνέχειας (3.2). Επιπλέον, απαιτείται και μία καταστατική εξίσωση η οποία να συνδέει την πίεση σε κάποιο σημείο με την πυκνότητα στο ίδιο σημείο. Η σχέση αυτή μπορεί να περιλαμβάνει και άλλες φυσικές παραμέτρους όπως η θερμοκρασία κτλ. Αντιλαμβανόμαστε ότι έχουμε στα χέρια μας ένα δύσκολο πρόβλημα που θα εξετάσουμε στο Κεφ. 7. Είναι λοιπόν μεγάλη απλοποίηση για την περίπτωση τού ασυμπίεστου ρευστού ότι η εξίσωση συνέχειας είναι απλή ($\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0$), ενώ η καταστατική εξίσωση γίνεται: $\rho =$ σταθερά. Είδαμε δε, ότι για να ισχύει ο περιορισμός αυτός πρέπει ο αριθμός $Mach$ να είναι πολύ μικρός.

Εάν το υγρό βρίσκεται κάτω από την επίδραση βαρυτικού πεδίου (ή άλλης εξ αποστάσεως δύναμης) τότε η αντίστοιχη δύναμη $\rho\vec{g}$ πρέπει να προστεθεί στο δεξιό μερός της (4.4), όπου $\vec{g}$ είναι η επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας[3]. Η δύναμη του βαρυτικού πεδίου δρα σαν δύναμη όγκου, διότι είναι ανάλογη της μάζας. Η εξίσωση λοιπόν κίνησης παίρνει την μορφή:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} \;=\; -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho}+\vec{g}. \tag{4.5}$$

τοπική αδράνεια + μεταφορική αδράνεια = Δύναμη πίεσης + Δύναμη βαρύτητας

επιτάχυνση (δύναμη αδράνειας) = Εξωτερικές δυνάμεις

Γράφοντας τη βαρυτική δύναμη ανά μονάδα μάζας σαν τη σταθερή επιτάχυνση $\vec{g}$ παραλείπουμε τη μεταβολή του με το ύψος από την επιφάνεια της γής σύμφωνα με τον νόμο της βαρύτητας. Αυτό είναι μία καλή προσσέγγιση για τις περισσότερες περιπτώσεις ροής όπου ο όρος της δυναμικής πίεσης υπερισχύει της βαρύτητας και οι διαστάσεις του χώρου μέσα στον οποίο έχουμε ροή δεν είναι πολύ μεγάλες. Έτσι αν το ύψος του ρευστού h είναι πολύ μικρότερο από την ακτίνα της Γης R_0 τότε $g =$ σταθερά είναι καλή προσέγγιση. Όταν όμως μελετούμε την κίνηση αερίων μαζών σε εύρος χιλιάδων χιλιομέτρων τότε η μεταβολή πρέπει να υπολογιστεί και είναι σημαντική. Εάν είναι απαραίτητο να περιλάβουμε την εξάρτηση του g από το ύψος αυτό γίνεται εύκολα αντικαθιστώντας το $\vec{g}$ με $-\vec{\nabla}U(\vec{r})$, όπου $U(\vec{r})$ είναι το βαρυτικό η άλλο διατηρητικό πεδίο. Έτσι έχουμε

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} \;=\; -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho}-\vec{\nabla}U(\vec{r}). \tag{4.6}$$

Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι κάνουμε μία σημαντική υπόθεση ότι οι δυνάμεις που ασκούνται στα σωματίδια του υγρού είναι τοπικές δηλαδή ασκούνται μέσω της περιβάλλουσας επιφάνειας. Αυτό δεν θα συνέβαινε όμως π.χ εάν το υγρό αποτελούνταν από φορτισμένα σωματίδια όπου έχουμε μεταξύ των σωματιδίων δυνάμεις μεγάλης εμβέλειας και η διαφορική εξίσωση θα είναι ολοκληρωτική.

Μια άλλη σημαντική υπόθεση για την εξίσωση $Euler$ είναι ότι δεν έχουμε δυνάμεις τριβής που δημιουργούν απώλεια ενέργειας και παραγωγή θερμότητας. Αυτό σημαίνει ότι μελετάμε ένα τέλειο υγρό όπου παραλείπουμε το ιξώδες και τη θερμική αγωγιμότητα. Από την άλλη πλευρά πρέπει να τονίσουμε ότι η εξίσωση $Euler$ για τη διατήρηση ορμής στη μορφή της (4.5) ισχύει και αν ακόμη η ροή είναι συμπιεστή. Απλώς στην περίπτωση αυτή πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μαζί με την εξίσωση συνέχειας και την αντίστοιχη καταστατική σχέση. Στη συνέχεια όμως θα χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση του ασυμπίεστου ρευστού, εκτός αν δηλωθεί αλλοιώς. Η απλοποίηση αυτή είναι ικανοποιητική για χαμηλής ταχύτητας ροή, αλλά πιο σημαντικό θα μας δώσει τη δυνατότητα να δώσουμε μια εύκολη φυσική εικόνα.

[3]Η κατεύθυνση της επιτάχυνσης της βαρύτητας είναι στον αρνητικό $z-$άξονα (δηλ. $\vec{g}=-g\hat{z}$), ώστε η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια ανά μονάδα μάζας είναι $U=gz$ με σημείο αναφοράς το $z=0$. Συχνά για ασυμπίεστη ροή είναι χρήσιμο να ορίσουμε την ενεργό πίεση $P^{\star}=P+\rho gz$ που είναι η διαφορά της πίεσης από την υδροστατική πίεση στο αντίστοιχο σημείο. Ετσι η $P^{\star}$ έχει να κάνει με το μέρος της πίεσης λόγω της ροής του ρευστού και είναι αυτή που μας δίνει την επιτάχυνση.

4.3 Θεώρημα *Bernoulli* και διατήρηση ενέργειας

Ας αναλύσουμε περαιτέρω την εξίσωση *Euler* υπολογίζοντας τον ρυθμό με τον οποίο κάνουν έργο οι αντίστοιχες δυνάμεις. Αυτό θα μας δώσει μία έκφραση για τον ρυθμό μεταβολής της μηχανικής ενέργειας. Χρησιμοποιώντας την σχέση (3.) για την επιτάχυνση λόγω μεταφοράς, $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$, μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση διατήρησης ορμής ως:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla}(\frac{1}{2}u^2) - \vec{u}\times\vec{\zeta} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P, \tag{4.7}$$

όπου $\vec{\zeta}$ είναι ο στροβιλισμός του πεδίου ταχύτητας, $\vec{f}$ είναι μία εξωτερική δύναμη ανά μονάδα μάζας που προέρχεται από ένα διατηρητικό πεδίο U (δυναμική ενέργεια ανά μονάδα μάζας), δηλαδή $\vec{f} = -\vec{\nabla}U$ με $\vec{\nabla}\times\vec{f} = 0$. Εάν επιπλέον υποθέσουμε ότι η ροή είναι αστρόβιλη ($\vec{\zeta} = \vec{\nabla}\times\vec{u} = 0$) τότε έχουμε $\vec{u} = -\vec{\nabla}\Phi$ και η (4.7) γίνεται:

$$-\vec{\nabla}(\frac{\partial \Phi}{\partial t}) + \vec{\nabla}(\frac{1}{2}u^2) \;\; = \;\; -\vec{\nabla}U - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P. \tag{4.8}$$

Η συνάρτηση δυναμικού του πεδίου ταχύτητας $\Phi(\vec{r},t)$ είναι μία βοηθητική συνάρτηση που χαρακτηρίζει ένα αστρόβιλο πεδίο (π.χ. μας λέει κάτι για την κυκλοφορία του πεδίου) και δεν είναι μία φυσική μετρήσιμη ποσότητα. Δεν πρέπει δε να συγχέεται με τη δυναμική ενέργεια ανά μονάδας μάζας $U(\vec{r})$. Εάν επι πλέον η ροή είναι στάσιμη $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$ και δεν υπάρχει εξωτερική δύναμη ($\vec{\nabla}U = 0$), τότε για ένα ασυμπίεστο υγρό με ομογενή πυκνότητα, η (4.8) έχει τη μορφή:

$$\vec{\nabla}(\frac{1}{2}u^2 + \frac{P}{\rho}) \;\; = \;\; 0. \tag{4.9}$$

Εάν τώρα θεωρήσουμε μία στιγμιαία νοητή μετατόπιση του σωματιδίου υγρού κατά $d\vec{r}$ από τη θέση $\vec{r}$ στην $\vec{r}+d\vec{r}$, και πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο της (4.9) με $d\vec{r}$ έχουμε από τη σχέση του διαφορικού

$$d\mathcal{B} = \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z}dz \equiv d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\mathcal{B},$$

και για την περίπτωση που έχουμε $\vec{\nabla}\mathcal{B} = 0$, ότι

$$d\mathcal{B}(\vec{r}) \equiv d\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{P}{\rho}\right) = 0 \tag{4.10}$$

ή

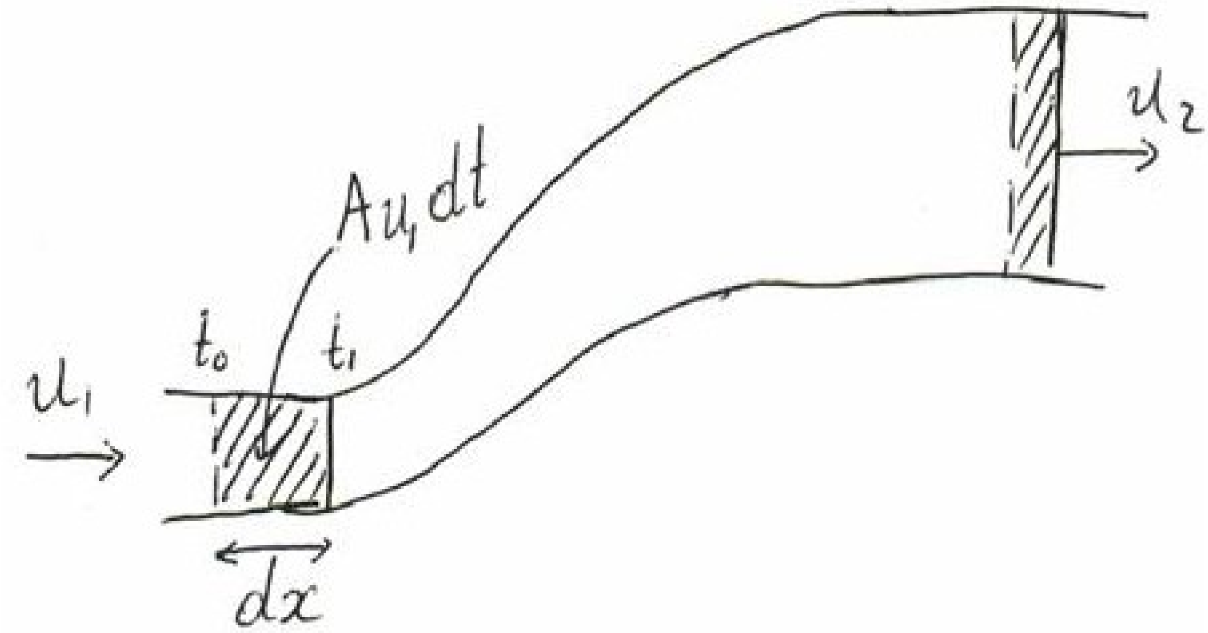
$$\mathcal{B}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{2}u^2 + \frac{P}{\rho} = C, \tag{4.11}$$

όπου η σταθερά C έχει την ίδια τιμή σε όλο τον όγκο του υγρού. Αυτό συμβαίνει διότι από την (4.9) και την (4.11) έχουμε $\vec{\nabla}C = 0$ για κάθε $\vec{r}$. Απαραίτητη προυπόθεση γι' αυτό είναι η ροή να είναι αστρόβιλη. Η (4.11) είναι η εξίσωση *Bernoulli* για ένα ασυμπίεστο, αστρόβιλο, ομογενές ιδανικό υγρό χωρίς εξωτερικές δυνάμεις, σε μόνιμη ροή.

Εάν τώρα το υγρό βρίσκεται υπό την επίδραση της βαρύτητας με δυναμικό U η (4.11) γίνεται:

$$\frac{1}{2}u^2 + U(\vec{r}) + \frac{P}{\rho} = C. \tag{4.12}$$

Η εξίσωση αυτή δέν είναι τίποτε άλλο παρά η αρχή της διατήρησης της ενέργειας, δηλαδή η μεταβολή της ολικής ενέργειας (κινητική + δυναμική) του υγρού σωματιδίου ισούται με το



Σχήμα 4.3: Σχ. 4.3 Διάγραμμα για τον νόμο *Bernoulli* σε αστρόβιλη ροή.

έργο που γίνεται για να υπερνικηθούν οι δυνάμεις του περιβάλλοντος υγρού στην επιφάνειά του. Έτσι, το έργο της πίεσης αποθηκεύεται σαν κινητική ή δυναμική ενέργεια. Ας θεωρήσουμε τη ροή στο Σχ. 4.3 και τον όγκο συστήματος (διακεκομένες γραμμές) ο οποίος κινείται μαζί με το ρευστό που περικλείει. Κατά τη μετατόπιση κατά dx έχουμε τη μετατόπιση μάζας ρdV που βρίσκεται στον όγκο $dV = Adx$, όπου A η διατομή στο αριστερό άκρο. Η πίεση στο αριστερό άκρο, P_A, κάνει έργο ανά μονάδα μετατοπιζόμενης μάζας

$$\frac{P_A A dx}{\rho A dx} = \frac{P_A}{\rho}$$

Στό άλλο άκρο του σωλήνα η πίεση ασκεί δύναμη αντίθετη προς την κίνηση της αντίστοιχης μάζας στο δεξιό μέρος και επομένως έχουμε αρνητικό έργο ίσο με $-\frac{P_B}{\rho}$. Το συνολικό έργο που γίνεται είναι

$$\frac{P_A}{\rho} - \frac{P_B}{\rho}$$

και ισούται με τη μεταβολή της ενέργειας (κινητικής και δυναμικής) κατά τη μετακίνηση του όγκου ελέγχου, δηλ.

$$\left(\frac{1}{2}u_B^2 + U_B\right) - \left(\frac{1}{2}u_A^2 + U_A\right) = \frac{P_A}{\rho} - \frac{P_B}{\rho}$$

και με ανακατάταξη των όρων έχουμε το θεώρημα *Bernoulli*.

Συνοψίζοντας, η εξίσωση *Bernoulli* στη μορφή (4.12) βασίζεται στις παρακάτω υποθέσεις:

1. Έχουμε μόνιμη ροή, μια συνήθης υπόθεση στο μεγαλύτερο μέρος αυτού του βιβλίου.

2. Ασυμπίεστη ροή, δηλ. χαμηλό αριθμό *Mach* ($Ma < 0.3$).

3. Αστρόβιλη ροή, καθόσον παραλείψαμε την κινητική ενέργεια περιστροφής του ¨σωματιδίου¨.

4. Μη ιξωδική ροή- πολύ περιοριστικό κοντά σε επιφάνειες που εισάγουν τριβή.

5. Δεν έχουμε έργο από έμβολα ή άλλα μηχανήματα κατά μήκος της διαδρομής.

6. Δεν έχουμε παραγωγή ή απορόφηση θερμότητας ανάμεσα σε δύο σημεία της διαδρομής.

Αν ικανοποιούνται οι παραπάνω υποθέσεις, η εξίσωση *Bernoulli* είναι ισοδύναμη με την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας. Και αυτό διότι η εξίσωση *Bernoulli* βγήκε από την αρχή διατήρησης της ορμής και επομένως δεν περιέχει τους δύο τελευταίους όρους. Αυτοί, όταν υπάρχουν, θα πρέπει να περιληφθούν στην αντίστοιχη εξίσωση διατήρησης ενέργειας. Εν γένει, αν δεν ικανοποιείται κάποια από τις παραπάνω προϋποθέσεις τότε πρέπει να διορθώσουμε κατάλληλα την εξίσωση *Bernoulli*.

4.3.1 Γενίκευση της αρχής διατήρησης ενέργειας.

Για ένα συμπιεστό υγρό η μετατρέψιμη εσωτερική ενέργεια (δηλ. το έργο που έγινε από την πίεση) συνδέεται με τη θερμοδυναμική διαδικασία. Έτσι π.χ., για ισοθερμική διαδικασία σε ιδανικό αέριο, η πίεση συνδέεται με την πυκνότητα ως $P =$ σταθερά $\cdot \rho$ ενώ για ισεντροπική έχουμε $P =$ σταθερά $\cdot \rho^\gamma$ όπου γ είναι θερμοδυναμική σταθερά που συνδέεται με το λόγο της ειδικής θερμότητας με σταθερή πίεση ή όγκο. Και για τις δύο περιπτώσεις $\rho = \rho(P)$ και έτσι ο όρος $\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P$ στην εξίσωση *Euler* γράφεται ως

$$\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P \rightarrow \vec{\nabla}\int^P \frac{1}{\rho(P')}dP' \rightarrow \vec{\nabla}\int^\rho \frac{1}{\rho'}\frac{dP(\rho')}{d\rho'}d\rho',$$

και στην περίπτωση αυτή η εξίσωση *Bernoulli* γίνεται

$$\frac{1}{2}u^2 + U(\vec{r}) + \int^P \frac{1}{\rho(P')}dP' = C. \tag{4.13}$$

όπου πάλι το C είναι σταθερό σε όλο το χώρο.

Εάν η ροή είναι ασυμπίεστη και αστρόβιλη, αλλά δεν είναι μόνιμη τότε πρέπει να πάρουμε υπόψη τον όρο $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ ο οποίος στην εξίσωση *Bernoulli* συνεισφέρει σαν πλήρες διαφορικό, δηλ.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\cdot d\vec{r} = \frac{\partial \vec{\nabla}\Phi}{\partial t}\cdot d\vec{r} = d\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right),$$

και η (4.12) γράφεται

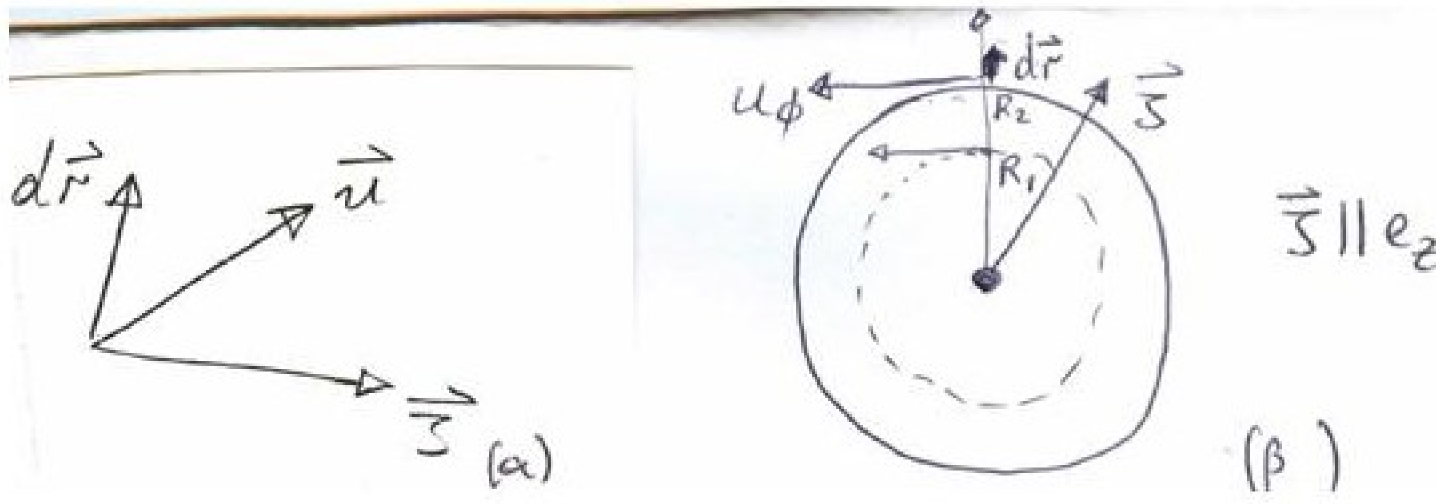
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\vec{\nabla}\Phi|^2 + U(\vec{r}) + \frac{P}{\rho} = C(t), \tag{4.14}$$

όπου πάλι η σταθερά ολοκλήρωσης $C(t)$ είναι σταθερή στο χώρο αλλά μπορεί να μεταβάλλεται με το χρόνο.

Το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορεί ισοδύναμα να βγεί αν υπολογίσουμε το έργο που γίνεται από μία νοητή μετακίνηση[4] πάνω σε σε μία καμπύλη D που ενώνει δύο τυχαία σημεία. Ο πρώτος όρος μας δίνει για τη διαφορά ανάμεσα σε δύο σημεία

$$\int_1^2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\cdot d\vec{r}$$

[4]Αναφερόμαστε σε νοητή μετακίνηση χωρίς εξέλιξη στο χρόνο, διότι η καμπύλη D δεν είναι η τροχιά κάποιου ρευστού σωματιδίου. Επίσης αντιστοιχούμε στην επιτάχυνση την δύναμη αδρανείας ανά μονάδα μάζας και μπορούμε να μιλάμε για το αντίστοιχο έργο. Για την περίπτωση που η ροή είναι αστρόβιλη, το έργο αυτό είναι ανεξάρτητο της διαδρομής και εξαρτάται μόνο από τά άκρα. Είναι προφανές όμως ότι το εικονικό αυτό έργο μεταβάλλεται με την χρονική στιγμή της νοητής μετατόπισης.



Σχήμα 4.4: Σχ. 4.4 (α) Διάγραμμα για το μηδενισμό του έργου στροβιλισμού. Τα διανύσματα $d\vec{r}, \vec{u}, \zeta$ είναι στό ίδιο επίπεδο. (β) Εφαρμογή του γενικευμένου θεωρήματος *Bernoulli* σε ροή περιστροφής.

και είναι το έργο ανά μονάδα μάζας λόγω της τοπικής επιτάχυνσης από αντίστοιχες χρονοεξαρτημένες δυνάμεις.

Εάν η ροή είναι μόνιμη αλλά όχι απαραίτητα αστρόβιλη τότε από την (4.7) και ακολουθόντας τα ίδια βήματα όπως όταν καταλήξαμε στην (4.11), για την περίπτωση της αστρόβιλης ροής, έχουμε αντί της (4.11):

$$d(\frac{1}{2}u^2 + U + \frac{P}{\rho}) = d\vec{r} \cdot (\vec{u} \times \vec{\zeta}), \tag{4.15}$$

όπου η δεξιά πλευρά της (4.15) έχει την μορφή επί πλέον έργου που πρέπει να υπολογίσουμε λόγω στροβιλισμού. Υπό ορισμένες συνθήκες όμως το δεξιό μέρος μηδενίζεται:

- I) Αν $\vec{u} \times \vec{\zeta} = 0$. Στην περίπτωση αυτή η σταθερά στην εξίσωση *Bernoulli* είναι η ίδια σε όλο τον χώρο. Αυτό συμβαίνει όταν:
  1. $\vec{\zeta} = 0$ που είναι η περίπτωση της δυναμικής ροής που εξετάσαμε, και
  2. $\vec{u}$ και $\vec{\zeta}$ είναι παράλληλα, ώστε οι γραμμές ροής και στροβιλισμού συμπίπτουν. Και για τις δύο περιπτώσεις η (4.12) ισχύει.
- II) Αν $\vec{u} \times \vec{\zeta} \neq 0$ αλλά $d\vec{r}$ είναι στο επίπεδο των $\vec{u}$ και $\vec{\zeta}$ (αμφότερα κάθετα στο $\vec{u} \times \vec{\zeta}$). Δηλαδή διαλέγουμε τη μετατόπιση $d\vec{r}$, από το σημείο P να είναι στην επιφάνεια, μέσω του P που περιέχει τις γραμμές ρεύματος και τις γραμμές στροβιλισμού.

Στην περίπτωση (II) (δές Σχ. 4.4α) με την μετατόπιση πάνω σ' αυτήν την επιφάνεια δεν έχουμε κατά τη μετατόπιση έργο λόγω στροβιλισμού και ισχύει πάλι η (4.12). Υπάρχει όμως μία διαφορά εδώ. Η σταθερά στο δεξιό μέρος της (4.12) έχει διαφορετική τιμή για κάθε τέτοια επιφάνεια και δεν έχει την ίδια τιμή σε όλο τον όγκο του υγρού όπως προηγουμένως. Μια ειδική περίπτωση διαδρομής κατά την οποία δεν έχουμε έργο λόγω στροβιλισμού, είναι ακολουθόντας τις γραμμές ροής, που είναι και πιο κατανοητό.

Σε περίπτωση που η ροή δεν είναι μόνιμη με στροβιλισμό η εξίσωση *Bernoulli* γίνεται:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}u^2+U+\frac{P}{\rho}\right)=-\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}-(\vec{\nabla}\times\vec{u})\times\vec{u}. \tag{4.16}$$

Εάν δε, ολοκληρώσουμε πάνω σε μία καμπύλη D μεταξύ των σημείων $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$, έχουμε για την μεταβολή

$$\Delta\left(\frac{1}{2}u^2+U+\frac{P}{\rho}\right)\equiv\left(\frac{1}{2}u^2+U+\frac{P}{\rho}\right)|_1^2=-\frac{\partial}{\partial t}\int_1^2\vec{u}\cdot d\vec{r}+\int_1^2 d\vec{r}\cdot(\vec{u}\times\vec{\zeta}). \tag{4.17}$$

Εάν η καμπύλη D είναι συμπίπτει με μια γραμμή ροής τη χρονική στιγμή t, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του όρου της στροφορμής μας δίνει μηδενική συνεισφορά σε κάθε σημείο του επικαμπύλιου ολοκληρώματος.

Αξίζει να θεωρήσουμε πάλι το παράδειγμα 2 (Κεφ. 2.6) μόνιμης ροής του στροβίλου με σταθερό στροβιλισμό σε όλο το χώρο. Ας θεωρήσουμε την μετατόπιση κατά μήκος της ακτίνας R από το R_1 στο R_2 (δές Σχ. 4.4β). Τότε για $u_\phi=\Omega R$, έχουμε από την εξίσωση *Euler* με ολοκλήρωση[5]

$$P=\frac{1}{2}\rho\Omega^2R^2$$

και

$$\Delta\left(\frac{1}{2}u^2+\frac{P}{\rho}\right)=\Delta\left(\Omega^2R^2\right)$$

Ενώ το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του όρου στροφορμής με $\vec{\zeta}=2\Omega\hat{e}_z$ μας δίνει

$$\int_1^2 d\vec{r}\cdot(\vec{u})\times\vec{\zeta}=\int_1^2 dR(2\Omega^2R)=\Delta\left(\Omega^2R^2\right)$$

και ικανοποιείται η γενικευμένη μορφή του θεωρήματος *Bernoulli*.

4.4 Εξισώσεις *Euler* σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Για την περίπτωση ανιξωδικής και ασυμπίεστης ροής οι εξισώσεις ορμής και συνέχειας μας δίνουν την κατανομή της ταχύτητας $\vec{u}(\vec{r},t)$ και της πίεσης $P(\vec{r},t)$ στο χώρο και τη μεταβολή τους στο χρόνο. Για προβλήματα ροής με κυλινδρική συμμετρία είναι σκόπιμο να χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες $\vec{r}\to(R,\phi,z)$ και με συνιστώσες της ταχύτητας $\vec{u}\equiv(u_R,u_\phi,u_z)$, οι εξισώσεις διατήρησης ορμής και συνέχειας της πυκνότητας, παίρνοντας υπόψη μόνο τη βαθμίδα πίεσης, γίνονται

$$\frac{\partial u_R}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})u_R-\frac{u_\phi^2}{R} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial R}. \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})u_\phi+\frac{u_Ru_\phi}{R} = -\frac{1}{\rho R}\frac{\partial P}{\partial\phi}. \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})u_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}. \tag{4.20}$$

και

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(Ru_R)+\frac{1}{R}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0. \tag{4.21}$$

[5]Να παρατηρήσουμε ότι το αποτέλεμα για την πίεση μας λέει ότι η πίεση αυξάνει εκεί που αυξάνει και η κινητική ενέργεια. Αυτό θα μας φαινόταν λάθος αν είχαμε υπόψη την απλή μορφή για αστρόβιλη ροή.

όπου σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\vec{u}\cdot\vec{\nabla} = u_R\frac{\partial}{\partial R} + \frac{u_\phi}{R}\frac{\partial}{\partial \phi} + u_z\frac{\partial}{\partial z}. \tag{4.22}$$

Οι όροι στο αριστερό μέρος που δεν έχουν παραγώγιση προέρχονται από την παραγώγιση ως προς ϕ των μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{e}_R$ και $\hat{e}_\phi$. Έτσι π.χ.

$$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})(u_R\hat{e}_R) = \left[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})u_R\right]\hat{e}_R + \frac{u_R u_\phi}{R}\hat{e}_\phi,$$

που μας δίνει συνεισφορά και στην εφαπτομενική επιτάχυνση.

Εάν τώρα η ταχύτητα έχει την μορφή

$$\vec{u} = u_\phi(R,t)\hat{e}_\phi, \tag{4.23}$$

οι γραμμές ροής είναι κυκλικές και όπως είδαμε στο Κεφ. 3, λόγω της ανεξαρτησίας της u_ϕ από την γωνία ϕ, η σχέση ασυμπιεστότητας $(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})$ ικανοποιείται αυτόματα. Για την περίπτωση αυτή

$$\vec{u}\cdot\vec{\nabla} = \frac{u_\phi}{R}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[u_\phi(R,t)\hat{e}_\phi\right] = \frac{u_\phi^2}{R}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{e}_\phi = -\frac{u_\phi^2}{R}\hat{e}_R. \tag{4.24}$$

Οι εξισώσεις *Euler* γίνονται

$$-\frac{u_\phi^2}{R} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial R}. \tag{4.25}$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho R}\frac{\partial P}{\partial \phi}. \tag{4.26}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = 0. \tag{4.27}$$

Από τις εξισώσεις (4.26, 4.27) συμπεραίνουμε ότι

$$P(R,\phi,t) = g(R,t)\phi + f(R,t),$$

και επειδή η πίεση είναι μονοσήμαντη, δηλ. $P(R,\phi+2\pi) = P(R,\phi)$, έχουμε $g(R,t) = 0$, και επομένως η πίεση εξαρτάται μόνο από την ακτίνα R και το χρόνο t. Αυτό σημαίνει ότι δεν έχουμε βαθμίδα πίεσης στην $\hat{e}_\phi$ (εφαπτομενική) κατεύθυνση και επομένως $\frac{\partial u_\phi}{\partial t} = 0$, δηλ. δεν έχουμε εφαπτομενική επιτάχυνση. Έτσι, η ταχύτητα είναι και ανεξάρτητη του χρόνου[6].

4.4.1 Εξισώσεις *Euler* σε σφαιρικές συντεταγμένες

Μεταφέροντας τις συνιστώσες της επιτάχυνσης σε σφαιρικές συντεταγμένες καθώς και τη βαθμίδα της πίεσης εύκολα βρίσκουμε

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})u_r - \frac{u_\theta^2}{r} - \frac{u_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}. \tag{4.28}$$

[6] Το τελευταίο δεν ισχύει αν πάρουμε υπόψη και τις δυνάμεις τριβής λόγω του ιξώδους, όπως θα δούμε στο Κεφ. 6.

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\phi^2 \cot\theta}{r} \quad = \quad -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \theta}. \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})u_\phi + \frac{u_r u_\phi}{r} + \frac{u_\theta u_\phi \cot\theta}{r} \quad = \quad -\frac{1}{\rho r \sin\theta}\frac{\partial P}{\partial \phi}. \tag{4.30}$$

και

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi} = 0. \tag{4.31}$$

όπου σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\vec{u}\cdot\vec{\nabla} = u_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{u_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}. \tag{4.32}$$

4.5 Φυσική ανάλυση μή ομογενούς ροής

4.5.1 Το πρόβλημα της σήριγγας

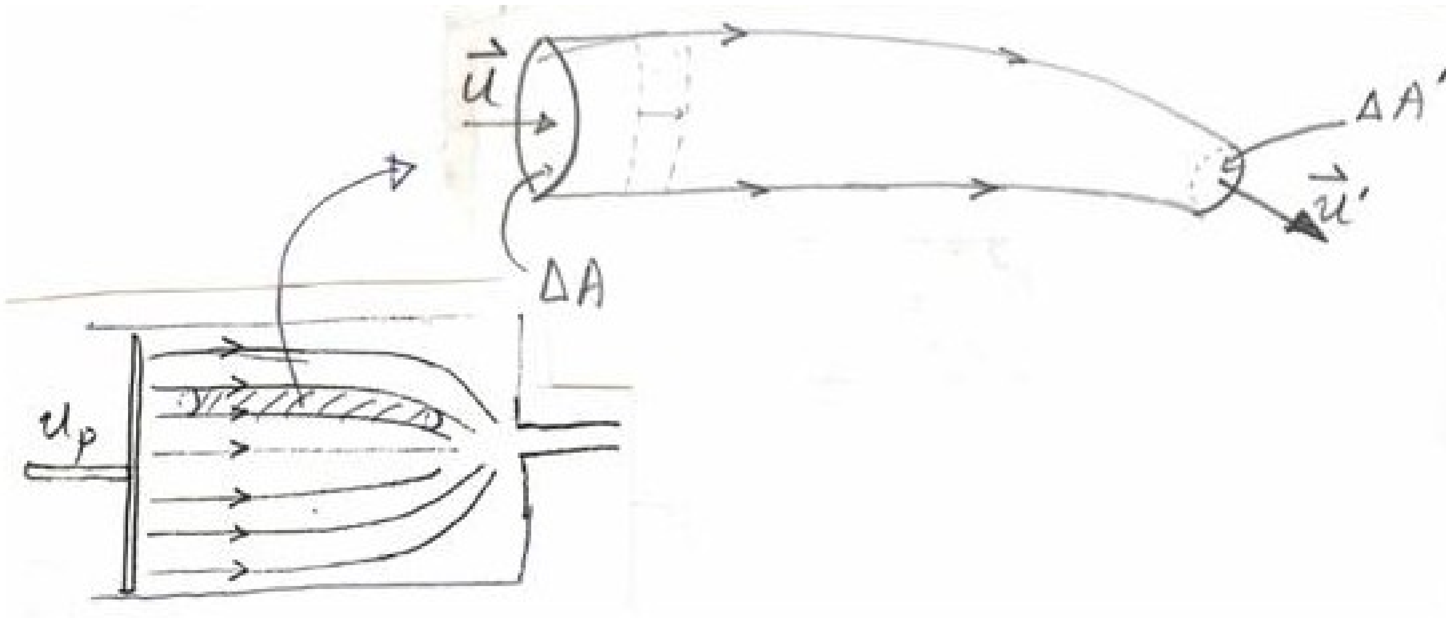
Σαν ένα συγκεκριμένο παράδειγμα για την ανάλυση του νόμου *Bernoulli* και της εξίσωσης *Euler*, χρησιμοποιούμε τη ροή μέσα από μία σύριγγα. Κύριος στόχος είναι η μεθοδολογία για τη μελέτη ενός προβλήματος υδροδυναμικής και η αναγνώριση των απλουστεύσεων χωρίς να χρησιμοποιούμε πολύπλοκα ολοκληρώματα. Ταυτόχρονα όμως θα δείξουμε ότι τα αποτελέσματα της εξίσωσης *Euler* είναι σύμφωνα με αυτό που θα περιμέναμε από την κλασσική μηχανική. Θα μας δωθεί επίσης η ευκαιρία να ¨διαβάζουμε' ένα διάγραμμα του πεδίου ταχύτητας ώστε να βγάζουμε πληροφορίες για την επιτάχυνση αλλά και τη βαθμίδα πίεσης.

Κατάρχήν υποθέτουμε ότι έχουμε φτάσει σε συνθήκες ομαλής ροής υπό την πίεση του εμβόλου που κινείται με σταθερή ταχύτητα u_p. Στο Σχ. 4.5 δείχνουμε τις γραμμές ροής. Πολύ μακριά στο αριστερό άκρο οι γραμμές είναι παράλληλες και κάθετες στο έμβολο. Όσο όμως πλησιάζουμε στη δεξιά οπή οι γραμμές πρέπει να συγκλίνουν.

Εφόσον η ροή είναι μόνιμη θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια του σωλήνα ροής. Θεωρούμε δηλαδή έναν εικονικό σωλήνα του οποίου η εξωτερική επιφάνεια είναι κατά μήκος γραμμών ροής τις οποίες ακολουθεί. Αυτό σημαίνει ότι το υγρό που εισέρχεται από το αριστερό άκρο δεν μπορεί να διαπεράσει τα πλαϊνά τοιχώματα του σωλήνα, αλλά θα βγει μόνο από το άλλο άκρο, χωρίς να συσσωρεύεται σε κάποιο σημείο. Αν αυτό συνέβαινε, (δηλαδή η συσσώρευση) τότε δεν θα είχαμε μόνιμη ροή. Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα του υγρού είναι διαφορετική στα δύο άκρα (και σε κάθε σημείο) και μάλιστα κατά τέτοιο τρόπο ώστε η ολική μάζα που διέρχεται για κάποιο χρονικό διάστημα dt από δύο διαφορετικές τομές με εμβαδόν ΔA και $\Delta A'$ είναι ίσες, δηλαδή το γινόμενο

$$\rho u \Delta A = \quad \text{σταθερά}$$

είναι σταθερό κατά μήκος του σωλήνα. Εάν υποθέσουμε επιπλέον ότι οι μεταβολές στην πυκνότητα ρ είναι αμελητέες (ασυμπίεστο υγρό) τότε το γινόμενο $u\Delta A$ είναι σταθερό. Όπου λοιπόν έχουμε συσσώρευση γραμμών ροής αυτό σημαίνει μικρότερη διατομή και επομένως μεγαλύτερη ταχύτητα του υγρού. Και είναι προφανές από το Σχήμα 4.5α και 4.5β ότι η μεταβολή της ορμής του σωματιδίου υγρού γίνεται κυρίως κοντά στην οπή. Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η εικόνα κοντά στα τοιχώματα είναι εξιδανικευμένη. Υποθέτουμε δηλαδή ότι η σταθερή εσωτερική επιφάνεια της σύριγγας είναι μία γραμμή ροής. Στην πραγματικότητα όμως θα υπάρχει ένα στρώμα κοντά στην επιφάνεια το οποίο θα συμπεριφέρεται διαφορετικά λόγω των δυνάμεων τριβών που ασκούνται. Δηλαδή όχι μόνο παραλείπουμε το ιξώδες μέσα στο υγρό, αλλά και τις



Σχήμα 4.5: Σχ. 4.5 (α) Γραμμές Ροής σε σύριγγα υπό σταθερή πίεση. (β) Σωλήνας ροής σε μεγένθυση από το (α).

τριβές στην επιφάνεια σε επαφή με την σύριγγα. Η περιγραφή όμως που δώσαμε είναι αρκετά ικανοποιητική όταν ο σωλήνας ροής είναι πιο κοντά στο κέντρο της σύριγγας όπου δεν περιμένουμε φαινόμενα του επιφανειακού στρώματος ή φαινόμενα στροβιλισμού, ενώ στο στόμιο λόγω της μεγάλης ταχύτητας το ιξώδες δεν έχει σημαντική επίδραση. Σε ένα πραγματικό υγρό και ιδιαίτερα στις γωνίες θα περιμέναμε τη δημιουργία τοπικών στροβίλων.

Ας δούμε τώρα με μεγαλύτερη λεπτομέρεια τη δυναμική συμπεριφορά ενός σωματιδίου υγρού το οποίο για ευκολία το διαλέγουμε με τη μορφή κύβου με κέντρο στον άξονα συμμετρίας της σύριγγας και δύο πλευρές του κάθετες σάυτόν (Σχ. 4.6). Η πλευρά του κύβου είναι a. Η συμμετρική αυτή τοποθέτηση μας δίνει τη δυνατότητα να μελετήσουμε πια ένα μονοδιάστατο πρόβλημα. Το γεγονός ότι η γραμμή ροής στον άξονα συμμετρίας είναι ευθεία σημαίνει ότι δεν υπάρχει διαφορά πίεσης στις απέναντι πλευρές παρά μόνο στη ξ- κατεύθυνση.

Στο χρονικό διάστημα Δt το σωματίδιο μετατοπίζεται από τη θέση O με αρχική ταχύτητα u_o (στην x-κατεύθυνση) στη θέση O′ σε απόσταση $\Delta x = u_o \Delta t$ με τελική ταχύτητα $u_{o'}$. Η επιτάχυνση του σωματιδίου είναι:

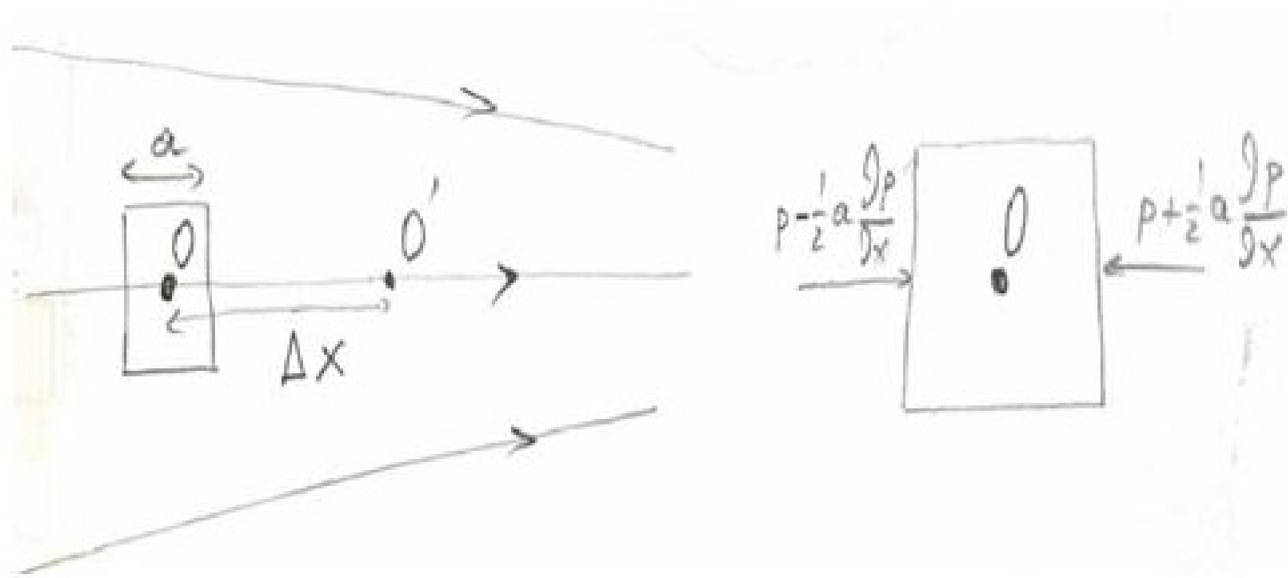
$$a \equiv \frac{du}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u_{o'} - u_0}{\Delta t}. \tag{4.33}$$

Στην περίπτωση της μόνιμης ροής η ταχύτητα δεν εξαρτάται άμεσα από το χρόνο αλλά μόνο από τη θέση x. Ετσι αναπτύσσοντας σε ανάπτυγμα $Taylor$ για μικρό Δx, έχουμε

$$u_{o'} = u_o + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_o \Delta x = u_o + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_o u_o \Delta t, \tag{4.34}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι η απόσταση Δx των δυο σημείων στο χώρο είναι και η μετατόπιση του ρευστού σωματιδίου σε χρόνο Δt με ταχύτητα u_o,που μπορεί να θεωρηθεί σταθερά, δηλ. $\Delta x = u_o \Delta t$. Λύνοντας από την (4.34) για $u_o' - u_o$ και αντικαθιστώντας στην (4.33) έχουμε για την επιτάχυνση του σωματιδίου :

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_o u_o = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u^2\right)_o. \tag{4.35}$$



Σχήμα 4.6: Σχ. 4.6 Δυνάμεις σε ένα σωματίδιο ρευστού κινούμενο στην κεντρική γραμμή ροής της σήραγγας.

Η σχέση αυτή μοιάζει πολύ με την αντίστοιχη ενός σωματιδίου στη μηχανική καθώς:

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v = \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}v^2). \tag{4.36}$$

Έτσι για μία μόνιμη ροή, χρησιμοποιώντας την έννοια του πεδίου ταχύτητας και τον ορισμό της επιτάχυνσης (4.33) όπως αυτή ορίζεται για ένα σωματίδιο στην εξίσωση του Νεύτωνα (υλική παράγωγος ταχύτητας), καταλήγουμε στην ίδια σχέση με αυτή της κλασσικής μηχανικής όπου ορίζουμε τις τροχιές σωματιδίων σύμφωνα με τη μέθοδο *Lagrange*. Αυτό δεν πρέπει να μας εκπλήσσει διότι, όπως είπαμε και στο Κεφ. 2, οι γραμμές ροής συμπίπτουν με τις τροχιές των σωματιδίων για μόνιμη ροή. Η συμφωνία αυτή είναι εντυπωσιακή διότι αρχίσαμε απο εντελώς διαφορετικές περιγραφές με διαφορετικές ποσότητες να περιγράφουν την κινητική. Στην κλασσική μηχανική έχουμε την ταχύτητα και θέση του σωματιδίου $v(t)$ και $x(t)$, ενώ στην υδροδυναμική ορίζουμε το πεδίο ταχύτητας $u(x,t)$, και γι αυτό και έχουμε μερική παραγώγιση. Πρέπει να πούμε ότι η αριστερή εξίσωση στην (4.35) είναι σύμφωνη με τον ορισμό της υλικής επιτάχυνσης (3.) καθόσον για τη μόνιμη ροή $\partial u/\partial t = 0$ και απομένει μόνο ο όρος $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$, που έχει μόνο $x-$συνιστώσα και ίση με $u\frac{\partial u}{\partial x}$. Βλέπουμε ότι παρόλο που στην περιγραφή *Euler* του πεδίου ταχύτητας είχαμε $\partial u/\partial t = 0$ το σωματίδιο υγρού έχει επιτάχυνση.

4.5.2 Εφαπτομενική επιτάχυνση σε καμπυλη γραμμή ροής

Η προηγούμενη σχέση για την επιτάχυνση εύκολα γενικεύεται αν το σωματίδιο βρίσκεται πάνω σε γραμμή ροής η οποία είναι καμπύλη. Η επιτάχυνση για μόνιμη ροή είναι $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ που εν γένει έχει συνιστώσες στους τρεις άξονες. Αυτό είναι ανάλογο με την επιτάχυνση ενός σωματιδίου στη μηχανική σε καμπυλόγραμμη τροχιά. Εκεί έχουμε την εφαπτομενική επιτάχυνση και την κεντρομόλο. Εδώ θα ενδιαφερθούμε προς το παρόν για την εφαπτομενική επιτάχυνση. Επειδή η $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ είναι ανεξάρτητη του συστήματος αναφοράς κάνουμε μια περιστροφή των αξόνων ώστε ο νέος x-άξονας να είναι εφαπτόμενος της γραμμής ροής. Τότε οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας μηδενίζονται ενώ η τρίτη είναι ίση με το μέτρο της ταχύτητας. Έτσι η εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης είναι:

$$\text{εφαπτομενική} \quad \text{επιτάχυνση} \;=\; \frac{\partial}{\partial s}(\frac{1}{2}u^2), \tag{4.37}$$

όπου s είναι κατά μήκος της γραμμής ροής. Στο μέγεθος της κεντρομόλου επιτάχυνσης θα επανέλθουμε στην επόμενη παράγραφο.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι το υγρό δεν έχει διατμητικές τάσεις λόγω της έλλειψης ιξώδους. Στην περίπτωση αυτή η δύναμη πίεσης είναι παντού ισοτροπική αν και η τιμή της διαφέρει από σημείο σε σημείο, όπως πρέπει ώστε η διαφορά πίεσης να δρα σαν δύναμη επιτάχυνσης. Επειδή στο σωλήνα η ταχύτητα αυξάνεται κατά το μήκος του, περιμένουμε η πίεση να είναι μεγαλύτερη στο αριστερό μέρους του κύβου. Η πίεση στις απέναντι επιφάνειες δίνεται από την πίεση στο κέντρο O για μικρό μήκος a, αναπτύσσοντας σε σειρά $Taylor$, και είναι αντίστοιχα

$$(P - \frac{1}{2}a\frac{\partial P}{\partial x})_o \qquad \text{και} \qquad (P + \frac{1}{2}a\frac{\partial P}{\partial x})_o$$

για την αριστερή και δεξιά πλευρά. Η διαφορά μεταξύ τους θα μας δώσει την ολική εφαπτομενική δύναμη που ασκείται στον κύβο

$$\text{ολική} \quad \text{εφαπτομενική} \quad \text{δύναμη} \quad = -a^3(\frac{\partial P}{\partial x})_o,$$

όπου πολλαπλασιάσαμε με το εμβαδόν a^2 της επιφάνειας στην οποία ασκείται η πίεση. Το '-' πρόσημο είναι επειδή η πίεση στο δεξιό μέρος ασκεί δύναμη στον κύβο στην $x-$κατεύθυνση. Εξισώνοντας τη δύναμη με τη μάζα επί επιτάχυνση έχουμε:

$$-a^3\frac{\partial P}{\partial x} = (\rho a^3)\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}u^2). \tag{4.38}$$

Επειδή περιμένουμε θετική επιτάχυνση αυτό σημαίνει ότι $\partial P/\partial x < 0$ κατά μήκος της σύριγγας. Αυτό θα βρει μια πιο ακριβή έκφραση στο νόμο του $Bernoulli$ για την περίπτωση αυτή. Η (4.38) εύκολα γενικεύεται ως:

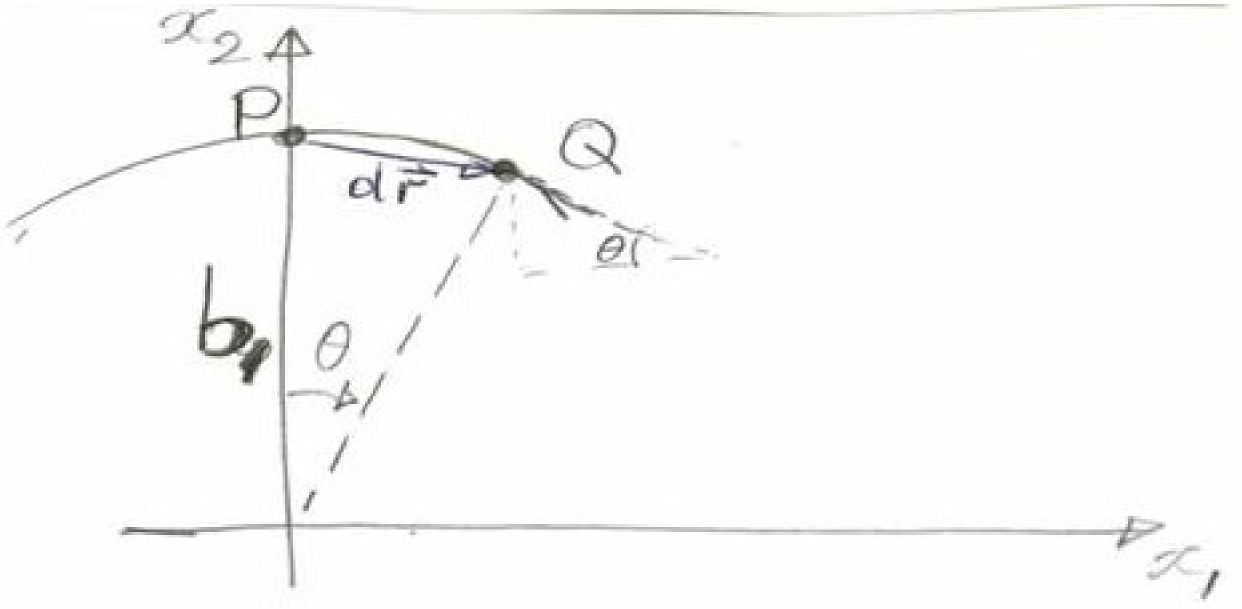
$$-\frac{\partial P}{\partial s} = \rho\frac{\partial}{\partial s}(\frac{1}{2}u^2) \tag{4.39}$$

αν οι γραμμές ροής είναι καμπυλόγραμμες σύμφωνα με την (4.9). Ολοκληρώνοντας σε κάθε περίπτωση κατά μήκος της γραμμής ροής έχουμε:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}u^2 = C$$

όπου η σταθερά είναι εν γένει διαφορετική για κάθε γραμμή ροής, αν και για το πρόβλημά μας είναι η ίδια παντού γιατί όλες οι γραμμές ροής στο ένα άκρο έχουν την ίδια πίεση (του εμβόλου) με την ίδια ταχύτητα του υγρού u_P. Εδώ έχουμε την επαλήθευση ότι σε στενωπό ροής η πίεση είναι χαμηλότερη, παρόλο που εκ πρώτης όψεως ακούγεται περίεργα. Εάν δεν είχαμε όμως χαμηλότερη πίεση δεν θα είχαμε μία ολική δύναμη για να επιταχύνει το υγρό. Και φυσικά η επιτάχυνση είναι απαραίτητη διότι από την αρχή της διατήρησης της μάζας ξέρουμε ότι η ταχύτητα ροής είναι μεγαλύτερη σε στενωπούς.

Εάν τώρα πάρουμε υπόψη τις δυνάμεις βαρύτητας (που ασκούνται σε όλη τη μάζα) αυτή έχει εφαπτομενική συνιστώσα ίση με $-\frac{\partial(gz)}{\partial s}$ (η ολική δύναμη είναι $-\vec{\nabla}(gz)$) όπου s είναι κατά



Σχήμα 4.7: Σχ. 4.7 Εγκάρσιες δυνάμεις σε ένα σωματίδιο ρευστού κινούμενο σε κυκλική τροχιά.

μήκος της τροχιάς. Από την εξίσωση του Νεύτωνα για στάσιμη ροή ($\partial\vec{u}/\partial t = 0$) έχουμε για τη συνιστώσα εφαπτομενική της τροχιάς:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial s} - \frac{\partial(gz)}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}(\frac{1}{2}u^2),$$

όπου το δεξιό μέρος είναι η επιτάχυνση. Και ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\frac{P}{\rho} + gz + \frac{1}{2}u^2 = C$$

που εκφράζει την διατήρηση της ενέργειας για ένα υγρό *Euler* όπου λόγω της έλλειψης διατμητικών τάσεων έχουμε μόνο μηχανική ενέργεια και όχι παραγωγή θερμότητας. Η σχέση αυτή θα μπορούσε να εξαχθεί και από το ενεργειακό ισοζύγιο.

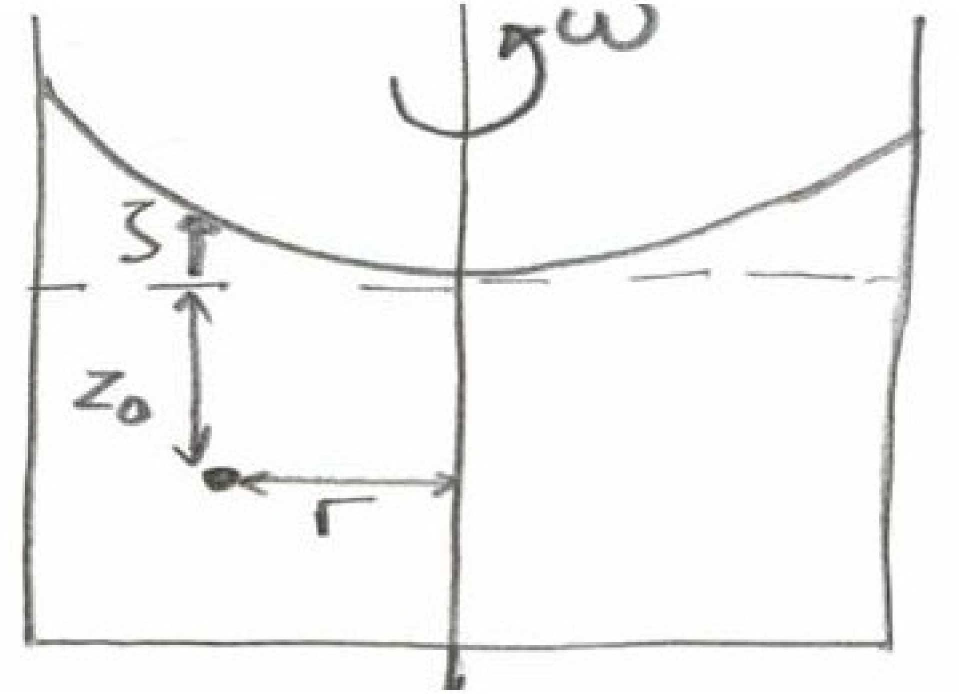
4.5.3 Εγκάρσια βαθμίδα πίεσης και κεντρομόλος επιτάχυνση σε μόνιμη κυκλική ροή

Σε μία μόνιμη ροή θεωρούμε ένα σωματίδιο που διαγράφει την κυκλική τροχιά ακτίνας b του σχήματος 4.7. Στο σημείο P η u_2 συνιστώσα της ταχύτητας μηδενίζεται. Θεωρούμε την ταχύτητα $u_2(Q)$ στο γειτονικό σημείο στην τροχιά Q που απέχει από το P κατά την μετατόπιση

$$d\vec{r} = dx_1\hat{\imath} + dx_2\hat{\jmath} = b\sin\theta\hat{\imath} + b(1-\cos\theta)\hat{\jmath}.$$

Αναπτύσσουμε το $u_2(Q)$ σε σειρά *Taylor* γύρω από το σημείο P και κρατώντας μόνο τους δύο όρους 1ης τάξης στις μεταβολές dx_1 και dx_2,

$$u_2(Q) = \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right|_P b\sin\theta + \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right|_P b(1-\cos\theta) \approx \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right|_P b\theta \qquad (4.40)$$



Σχήμα 4.8: Σχ. 4.8 Σταθερά περιστρεφόμενο δοχείο με ρευστό.

όπου για μικρές γωνίες θ κρατήσαμε όρους μέχρι πρώτης τάξης ως προς θ. Στην (4.40) ο δείκτης P(ή Q) δηλώνει ότι η συνάρτηση υπολογίζεται στις συντεταγμένες των σημείων P(ή Q). Αλλά

$$u_2(Q) = |u(Q)| \sin\theta \approx u_P\theta,$$

πάλι κρατώντας τον χαμηλότερο όρο ως προς θ. Εξισώνοντας τις δύο σχέσεις έχουμε:

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right|_P = \left(\frac{u}{R}\right)_P. \tag{4.41}$$

Με την επιλογή των αξόνων του σχήματος η ακτινική επιτάχυνση στο σημείο P είναι

$$\text{ακτινική} \quad \text{επιτάχυνση} \quad a_R(P) = (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})u_2 = \left(u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)_P$$

ή αντικαθιστώντας από την (4.41) και χρησιμοποιώντας ότι $u_1(P) = u$, έχουμε:

$$a_R = \left(u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)_P = \left(\frac{u^2}{R}\right)_P \tag{4.42}$$

το γνωστό αποτέλεσμα της κεντρομόλου επιτάχυνσης.

Επομένως όπου οι γραμμές ροής είναι καμπύλες με ακτίνα καμπυλότητας $R = b$ έχουμε κεντρομόλο επιτάχυνση και κατά συνέπεια ακτινική βαθμίδα πίεσης. Π.χ. για ένα ομαλά περιστρεφόμενο δοχείο μαζί με το περιεχόμενο υγρό (Σχ. 4.8), έχουμε μόνο κεντρομόλο επιτάχυνση προς τον άξονα περιστροφής. Σε μόνιμη κατάσταση η επιφάνεια του υγρού θα πάρει την μορφή παραβολοειδούς εκ περιστροφής.

Ας θεωρήσουμε ένα σημείο στο ρευστό σε απόσταση R από τον άξονα περιστροφής. Εάν P_0 είναι η ατμοσφαιρική πίεση τότε η πίεση σε κάθε σημείο που απέχει απόσταση R από τον άξονα περιστροφής και σε βάθος $[z_o + \zeta(R)]$ από την επιφάνεια του υγρού είναι:

$$P \;=\; P_0 + \rho g[z_o + \zeta(R)], \tag{4.43}$$

ολοκληρώνοντας την δύναμη στην z-κατεύθυνση. Εδώ η z_o είναι το βάθος από το χαμηλότερο σημείο της ελεύθερης επιφάνειας και $\zeta(R)$ είναι η συνάρτηση που περιγράφει την ελεύθερη επιφάνεια και το σχήμα της εξαρτάται από την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής. Εάν παραγωγίσουμε την πίεση ως προς P, από την ακτινική συνιστώσα της διατήρησης ορμής έχουμε:

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \rho g \frac{d\zeta}{dR} = \rho \frac{u^2}{R} \tag{4.44}$$

καθόσον η ακτινική συνιστώσα της βαθμίδας πίεσης είναι αυτή που δίνει την κεντρομόλο επιτάχυνση. Εάν η σταθερή γωνιακή ταχύτητα του υγρού είναι ω τότε έχουμε:

$$g\frac{d\zeta}{dR} = \omega^2 R \tag{4.45}$$

ή ολοκληρόνοντας ως προς R, έχουμε για την ακτινική μεταβολή της επιφάνειας

$$\zeta(R) = \frac{\omega^2 R^2}{2g} \tag{4.46}$$

4.6 Αριθμός *Froude* και συντελεστής πίεσης

Για την αριθμητική λύση των διαφορικών εξισώσεων της υδροδυναμικής είναι συχνά χρήσιμο να τις εκφράσουμε σε αδιάστατη μορφή. Αυτό μας δίνει την δυνατότητα να εκτιμήσουμε την σημασία κάθε όρου από το μέγεθος του συντελεστή που προκύπτει με την μετάβαση σε αδιάστατες μεταβλητές. Η βασική ιδέα είναι να επιλέξουμε τις χαρακτηριστικές κλίμακες του προβλήματος π.χ. μήκους, χρόνου κτλ. Π.χ. εάν έχουμε ένα εμπόδιο μεγέθους L στην ελεύθερη ροή ενός ρευστού τότε περιμένουμε ότι αυτή είναι η χαρακτηριστική κλίμακα μήκους, και οποιεσδήποτε αλλαγές συμβαίνουν στον χώρο π.χ. στο πεδίο ταχύτητας, αυτές συμβαίνουν στην κλίμακα L. Εάν δε η ασυμπτωτική ταχύτητα του ρευστού είναι u_0, τότε έχουμε και τον χαρακτηριστικό χρόνο $\tau = \frac{L}{u_0}$. Με το σκεπτικό αυτό μπορούμε να κάνουμε τις παρακάτω αλλαγές μεταβλητών:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= L\vec{r}' \\ \vec{u} &= u_0\vec{u}' \\ t &= \frac{L}{u_0}t' \end{aligned} \tag{4.47}$$

όπου οι τονισμένες ποσότητες είναι αδιάστατες. Η εξίσωση *Euler* γράφεται ως

$$\left(\frac{\rho u_0^2}{L}\right)\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t'} + \left(\frac{\rho u_0^2}{L}\right)(\vec{u}'\cdot\vec{\nabla}')\vec{u}' = -\left(\frac{\Delta P}{L}\right)\vec{\nabla}'P' - (\rho g)\,\vec{\nabla}'h'. \tag{4.48}$$

όπου $\vec{\nabla}'$ σημαίνει παραγώγιση ως προς $\vec{r}'$, και χρησιμοποιήσαμε για το δυναμικό της βαρύτητας ανά μονάδα όγκου

$$U = gLh'(\vec{r}'),$$

και για τη βαθμίδα πίεσης

$$\vec{\nabla}P = \frac{\Delta P}{L}\vec{\nabla}'P',$$

με $\frac{\Delta P}{L}$ μία χαρακτηριστική βαθμίδα πίεσης. Στην (4.48) οι όροι μέσα στην παρένθεση μας δίνουν την τάξη μεγέθους του κάθε όρου, περιμένοντας ότι αν η επιλογή των χαρακτηριστικών ποσοτήτων είναι η κατάλληλη οι αδιάστατες ποσότητες (εκτός παρένθεσης) είναι της τάξης της μονάδας. Εαν τώρα διαιρέσουμε την (4.48) με $\frac{\rho u_0^2}{L}$ τότε έχουμε την αδιάστατη μορφή

$$\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t'} + (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}')\vec{u}' = -\left(\frac{\Delta P}{\rho u_0^2}\right)\vec{\nabla}' P' - \left(\frac{1}{Fr^2}\right)\vec{\nabla}' h', \tag{4.49}$$

όπου η ποσότητα Fr ονομάζεται αριθμός $Froude$ και δίνεται από την σχέση

$$\text{αριθμός } Froude \quad Fr = \frac{u_0}{\sqrt{gL}}. \tag{4.50}$$

Ετσι το τετράγωνο του αριθμού $Froude$ μας δίνει τον λόγο της δύναμης αδράνειας[7] προς την βαρυτική δύναμη. Εαν ο αριθμός $Froude$ είναι μεγάλος, αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να παραλείψουμε την βαρυτική δύναμη σε σχέση με την αδρανειακή δύναμη. Αυτό θα συμβεί αν

$$\frac{u_0^2}{L} \gg g,$$

δηλ. δεν είναι μόνο η ταχύτητα αλλά και το χαρακτηριστικό μήκος που παίζουν ρόλο. Αυτό είναι απόλυτα αναμενόμενο αν θυμηθούμε ότι μπορούμε να συγκρίνουμε μόνο ποσότητες με ίδιες διαστάσεις, και ο αριθμός $Froude$ είναι η αδιάστατη ποσότητα που περιέχει και το g. Στα παραπάνω υποθέσαμε ότι τα χαρακτηριστικά μήκη και ταχύτητες είναι ίδια και στεις τρείς κατευθύνσεις. Σε αντίθετη περίπτωση νέες αδιάστατες ποσότητες, π.χ. λόγος μηκών θα παίξουν ρόλο.

Από τον όρο της πίεσης μπορούμε να ορίσουμε ένα άλλο αδιάστατο αριθμό, ο οποίος ονομάζεται συντελεστής πίεσης και δίνεται από την σχέση

$$\text{συντελεστής πίεσης} \quad C_p = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho u_0^2}, \tag{4.51}$$

που μετρά τον λόγο της βαθμίδας πίεσης προς τον αδρανειακό όρο. Συχνά αντί του C_p χρησιμοποιείται ο αριθμός $Euler$ που ορίζεται ως

$$\text{αριθμός } Euler \quad E = \frac{2}{C_p}.$$

Αν δε θέλουμε να συγκρίνουμε τον όρο της βαρύτητας προς αυτόν της πίεσης, ορίζουμε τον λόγο

$$\frac{E}{Fr^2} = \frac{\rho g L}{\Delta P},$$

όπου ο αριθμητής έχει επίσης μονάδες πίεσης και είναι η διαφορά υδροστατικής πίεσης για το μήκος L. Αργότερα θα δούμε ότι οι αδιάστατοι αυτοί αριθμοί χαρακτηρίζουν την μορφή της ροής και είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι για την ανάπτυξη μοντέλλων της ροής σε μικρότερες κλίμακες στο εργαστήριο.

Με την εισαγωγή των αδιάστατων σταθερών, έχουμε ένα εύκολο κριτήριο για την σύγκριση δύο όρων στην εξίσωση διατήρησης της ορμής. Στην περίπτωσή μας, υποθέσαμε ότι το πρόβλημά ροής εξαρτάται από μερικές χαρακτηριστικές ποσότητες. Λόγω της σημασίας των ποσοτήτων αυτών στον χαρακτηρισμό της ροής θα αφιερώσουμε αργότερα ένα ολόκληρο κεφάλαιο (Κεφ. 9)

[7] Αδρανειακή δύναμη είναι ο όρος της υλικής επιτάχυνσης $\rho\vec{a}$.

Η παραπάνω ανάλυση επίσης υποθέτει ότι οι όροι που είναι εκφρασμένοι σε αδιάστατες ποσότητες είναι της ίδιας τάξης μεγέθους[8], δηλ.

$$O\left(\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t'}\right) \approx O\left((\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}')\vec{u}'\right) \approx O\left(\vec{\nabla}' P'\right) \approx O\left(\vec{\nabla}' h'\right), \tag{4.52}$$

όπου το σύμβολο 'O' σημαίνει τάξη μεγέθους της αντίστοιχης ποσότητας. Εάν π.χ. η χρονική κλίμακα μεταβολής δεν είναι της τάξης $\frac{L}{u_0}$, αλλά πολύ μεγαλύτερη, τότε μπορούμε να παραλείψουμε τον όρο $\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t'}$ και να θεωρήσουμε ότι η ροή μας είναι μόνιμη. Ετσι από την παραπάνω συζήτηση έχουμε και ένα ποσοτικό κριτήριο για να θεωρήσουμε μία ροή ως μόνιμη.

Αυτό μπορεί να γίνει και ποσοτικά εισάγοντας τον αντίστοιχο αριθμό. Ετσι, άν θεωρήσουμε ότι η τοπική μεταβολή καθορίζεται από διαφορετική χρονική κλίμακα, T, τότε ορίζουμε τον χρόνο ως $t = Tt'$ και μπορούμε να ορίσουμε τον αριθμό *Strouhal* ως

$$\text{αριθμός } Strouhal \quad \equiv S = \frac{L}{UT}, \tag{4.53}$$

που είναι ο λόγος

$$S = \frac{\partial \vec{u}/\partial t}{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}} \sim \frac{\text{όρος τοπικής αδράνειας}}{\text{όρος αδράνειας μεταφοράς}}.$$

Ο αριθμός *Strouhal* μας δίνει μια εκτίμηση της χρονικής μεταβολής τοπικά. Ετσι, άν $S \ll 1$ ή $T \gg \frac{L}{U}$ μπορούμε να θεωρήσουμε μόνιμη ροή και να παραλείψουμε τον όρο $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ στην εξίσωση *Euler*.

4.7 Θερμοδυναμική ιδανικού υγρού

Εάν ο συντελεστής του ιξώδους μ και η σταθερά θερμικής αγωγιμότητας κ είναι αμελητέες, τότε δεν έχουμε ούτε παραγωγή αλλά ούτε και διάδοση θερμότητας από ένα όγκο ενός υγρού σε άλλο. Εάν δε επιπλέον δεν έχουμε και παραγωγή θερμότητας διάκτινοβολίας ή χημικών αντιδράσεων τότε έχουμε το ιδανικό υγρό *Euler* του προηγουμένου κεφαλαίου. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση διατήρησης ενέργειας δεν αποτελεί επιπλέον εξίσωση αλλά βγαίνει απέυθείας από την εξίσωση *Euler* χωρίς άλλες υποθέσεις. Η έλλειψη ανταλλαγής θερμότητας μεταξύ τμημάτων του υγρού ή του υγρού και περιβαλουσών επιφανειών, σημαίνει ότι η ροή είναι αδιαβατική σε όλο τον όγκο του υγρού. Η ροή ιδανικού υγρού λοιπόν είναι αδιαβατική και επομένως η εντροπία πρέπει να παραμένει σταθερή καθώς το σωματίδιο του υγρού κινείται στον χώρο.

Έτσι λοιπόν σε μεταβλητές *Euler* ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής γράφεται χρησιμοποιώντας την υλική παράγωγο

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt}, \tag{4.54}$$

$$\begin{array}{c} \text{Ρυθμός μεταβολής} \\ \text{της ενέργειας} \\ \text{του συστήματος} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Ρυθμός διάδοσης} \\ \text{θερμότητας} \\ \text{στο σύστημα} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Ρυθμός που} \\ \text{γίνεται έργο} \\ \text{στο σύστημα} \end{array} \tag{4.55}$$

[8] Υπάρχουν και περιπτώσεις που αυτό δεν ισχύει σε όλο το χώρο ροής. Αυτό συμβαίνει γύρω από σημεία ηρεμίας. Οταν εισάγουμε έστω και ελάχιστο ιξώδες, η ροή κοντά στα σημεία αυτά αλλάζει σημαντικά, αλλά χωρίς σημαντικές αλλαγές στη ροή μακριά από τα σημεία αυτά. Ετσι για την ροή κοντα στα σημεία ηρεμίας πρέπει να πάρουμε υπόψη και το ιξώδες, παρόλο που ο αριθμός *Reynolds* είναι μεγάλος. Εν τούτοις η παράλειψη του ιξώδους δεν επηρεάζει μακροσκοπικές ιδιότητες της ροής, εφόσον μείνουμε στο όριο $Re \gg 1$, εκτός από λίγες εξαιρέσεις (Δές Κεφ. 6.15).

όπου E η ολική ενέργεια που περιλαμβάνει κινητική, δυναμική και εσωτερική ενέργεια, $\frac{dQ}{dt}$ ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας[9] (ο οποίος μηδενίζεται για την ιδανική περίπτωση) και $\frac{dW}{dt}$ ο ρυθμός παραγωγής έργου από το υλικό σύστημα (π.χ. το σωματίδιο). Για την ολική ενέργεια έχουμε

$$\begin{aligned} E &= K + U + E_0 \quad \text{-ολική ενέργεια} \\ K &= \tfrac{1}{2}\int_V \rho u^2 dV \quad - \text{κινητική ενέργεια} \\ U &= \int_V \rho g z dV \quad - \text{δυναμική ενέργεια} \\ E_0 &= \int_V \rho \varepsilon_0 dV \quad - \text{εσωτερική ενέργεια} \end{aligned} \tag{4.56}$$

όπου το σημείο αναφοράς για την δυναμική ενέργεια[10] είναι το $z = 0$ και ε_0 είναι η πυκνότητα εσωτερικής ενέργειας ανά μονάδα μάζας. Ο ρυθμός παραγωγής έργου[11] από το σωματίδιο όγκου V στο περιβάλλον μέσω της επιφάνειάς του είναι

$$\frac{dW}{dt} = -\int_S P\vec{u}\cdot d\vec{S} = \int_V [\vec{\nabla}\cdot(P\vec{u})]dV = \int_V [\vec{\nabla}P]\cdot\vec{u}dV, \tag{4.58}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει μόνο για ασυμπίεστη ροή.

Επειδή η ροή είναι αδιαβατική έχουμε για την εντροπία ανά μονάδα μάζας ενός σωματιδίου

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \qquad \text{ή} \qquad \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}s = 0, \tag{4.59}$$

όπου s είναι η εντροπία ανά μονάδα μάζας και χρησιμοποιήσαμε την υλική παράγωγο καθόσον παρακολουθούμε το σωματίδιο στην κίνησή του με σταθερή μάζα. Χρησιμοποιώντας δε και την εξίσωση συνέχειας, η (4.59) μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \vec{\nabla}\cdot(\rho s\vec{u}) = 0, \tag{4.60}$$

όπου το $J_s = \rho s\vec{u}$ είναι η πυκνότητα ροής εντροπίας. Η (4.60) έχει την ίδια μορφή όπως η γενική εξίσωση συνέχειας[12] και μας λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής στον χρόνο της εντροπίας ανά

[9] Η ολική ενέργεια εξαρτάται από την θέση, την ταχύτητα, και θερμοδυναμική κατάσταση του σωματιδίου. Δεν ισχύει το ίδιο για το δεξιό μέρος όπου και οι δύο όροι δεν εξαρτώνται μόνο από την κατάσταση του σωματιδίου αλλά και από την προηγούμενη διαδρομή που ακολούθησε το σωματίδιο για να φτάσει σ' αυτή την κατάσταση. Γι' αυτό και χρησιμοποιούμε το σύμβολο 'd' για την μεταβολή τους, καθόσον δεν είναι τέλειο διαφορικό.

[10] Εάν η ροή γίνεται στην επιφάνεια της γής ή σε οποιαδήποτε άλλη καμπύλη βαρυτική επιφάνεια, η οποία μάλιστα μεταβάλλεται και με το χρόνο, τότε αντί του z, θα χρησιμοποιήσουμε το ύψος $h_g(\vec{r}, t)$ από μία ισοδυναμική επιφάνεια.

[11] Στην γενική περίπτωση έχουμε και δύναμη όγκου (εκτός βαρύτητας) ανά μονάδα μάζας, $\vec{f}$. Για μη ιξωδική ροή η αντίστοιχη δύναμη είναι λόγω της πίεσης που είναι πάντα κάθετη στην επιφάνεια. Για ιξωδική ροή έχουμε και διατμητικές δυνάμεις λόγω ιξώδους (δές Κεφ. 6) και πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τανυστές και ο ρυθμός παραγωγής έργου από το σωματίδιο στο περιβάλλον είναι

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \rho\vec{f}\cdot\vec{u}dV + \int_S \vec{u}\cdot\overline{\overline{\sigma}}\cdot d\vec{S}, \tag{4.57}$$

όπου ο δεύτερος όρος είναι ο ρυθμός έργου λόγω των επιφανειακών δυνάμεων. Στο όριο μη ιξωδικής ροής έχουμε $\vec{u}\cdot\overline{\overline{\sigma}}\cdot d\vec{S} \to -P\vec{u}\cdot d\vec{S}$.

[12] Η (4.60) μπορεί επίσης να γραφεί και ως

$$\frac{D}{Dt}(\rho s) = -\rho s(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}),$$

μονάδα όγκου είναι ίση με μείον την απόκλιση του ρεύματος εντροπίας. Ετσι αν περιβάλουμε το σωματίδιο με μία νοητή επιφάνεια και ολοκληρώσουμε στον όγκο τότε ο ρυθμός τοπικής μεταβολής είναι ίσος και αντίθετος με το ρεύμα εντροπίας μέσω της επιφάνειας. Στην αδιαβατική λοιπόν ροή η εξίσωση *Euler* απλοποιείται αν η εντροπία είναι σταθερή σε όλο το χώρο. Αυτό θα συμβεί αν σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή η S είναι σταθερή σε όλο τον όγκο, θα συνεχίσει έτσι και για αργότερους χρόνους. Τότε η ροή μας είναι ισο-εντροπική.

Εάν χρησιμοποιήσουμε αντί της πίεσης την ενθαλπία ανά μονάδα μάζας έχουμε από την θερμοδυναμική

$$dh = Tds + vdP \quad \text{ή} \quad dh = vdP, \tag{4.61}$$

όπου $v = 1/\rho$. Για ισο-εντροπική ροή ($s =$σταθερή), έχουμε

$$\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} = \vec{\nabla} h, \tag{4.62}$$

και η εξίσωση *Euler* γίνεται

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla} h. \tag{4.63}$$

Η σχέση αυτή ισχύει και αν ακόμη η ροή μας δεν είναι ασυμπίεστη. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι η πυκνότητα ρ είναι συνάρτηση της πίεσης σε κάθε σημείο. Εχουμε δηλ. $\rho(P)$ και από το διαφορικό της ενθαλπίας ανά μονάδα μάζας για ισεντροπική ροή $dh = \frac{dP}{\rho}$ έχουμε

$$h = \int_{P_a}^{P} \frac{dP}{\rho(P)}, \tag{4.64}$$

όπου P_a είναι η πίεση αναφοράς. Η σχέση είναι σύμφωνη με την (4.62), όπως φαίνεται αν πάρουμε την βαθμίδα της (4.64), δηλ.

$$\vec{\nabla} h = \frac{dh}{dP} \vec{\nabla} P = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P. \tag{4.65}$$

Εάν στην εξίσωση *Euler* διαχωρίσουμε την μεταφορική επιτάχυνση όπως στην παράγραφο 3.12 και χρησιμοποιήσουμε τον στροβιλισμό $\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$, τότε γράφεται ως

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\zeta} \times \vec{u} = -\vec{\nabla} \left[\frac{1}{2} u^2 + U + \int_{P_a}^{P} \frac{dP}{\rho(P)} \right], \tag{4.66}$$

Εάν το αριστερό μέρος στην (4.66) μηδενίζεται, έχουμε την γενίκευση του νόμου *Bernoulli* για συμπιεστή ροή,

$$\frac{1}{2} u^2 + U + \int_{P_a}^{P} \frac{dP}{\rho(P)} = \text{ σταθερά.} \tag{4.67}$$

Αυτό συμβαίνει για μόνιμη ροή και εφόσον ικανοποιείται επιπλέον ένα από τα παρακάτω. Η $\zeta = 0$ (οπότε η σταθερά είναι η ίδια παντού), η μετακινούμαστε κατά μήκος μιάς ροικής γραμμής, όπου δεν έχει συνιστώσα ο όρος $\zeta \times \vec{u}$ και έτσι ο στροβιλισμός δεν κάνει έργο. Στην δεύτερη περίπτωση η σταθερά είναι η ίδια κατά μήκος της γραμμής ροής, ενώ στην πρώτη περίπτωση το έργο στροβιλισμού είναι μηδέν σε οποιαδήποτε κατεύθυνση.

και βλέπουμε ότι και η εντροπία ανά μονάδα όγκου διατηρείται κατά την κίνηση, εάν όμως δεν έχουμε μεταβολή του όγκου ($\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$), λόγω μη μεταβολής της πυκνότητας κατά την κίνηση, δηλ. $\frac{D\rho}{Dt} = 0$.

Για την ισοεντροπική ροή ενος συμπιεστού αερίου έχουμε την καταστατική σχέση

$$P = P_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}, \tag{4.68}$$

όπου P_0 και ρ_0 είναι γνωστές σταθερές και $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, είναι ο λόγος της ειδικής θερμότητας σε σταθερή πίεση προς την ειδική θερμότητα σε σταθερό όγκο. Για τον αέρα $\gamma = 1.405$.

Η δε ενθαλπία ανά μονάδα μάζας είναι

$$h = \int_{P_a}^{P} \frac{dP}{\rho(P)} = \int_{P_a}^{P} \frac{dP}{\rho_0 (P/P_0)^{1/\gamma}} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho(P)} + h_a, \tag{4.69}$$

4.8 Θεώρημα κυκλοφορίας *Kelvin*

4.8.1 Θεώρημα και συνθήκες

Η ανιξωδική και αστρόβιλη ροή (ροή δυναμικού) δεν θα ήταν τόσο ενδιαφέρουσα αν δεν υπήρχε το θεώρημα του *Kelvin* που λέει ότι ο στροβιλισμός για ένα ασυμπίεστο και ανιξωδικό υγρό διατηρείται στον χρόνο. Οταν θα μελετήσουμε την ροή ιξωδικών ρευστών θα δούμε ότι σε στερεές επιφάνειες έχουμε και μηδενισμό της εφαπτομενικής ταχύτητας που δρα σαν πηγή στροβιλισμού. Σε πολλές περιπτώσεις ο στροβιλισμός αυτός διαφεύγει στον όγκο του ρευστού με τη μορφή μεμονομένων στροβίλων, οι οποίοι μεταφέρονται από την ροή. Μακριά από την επιφάνεια μπορούμε να θεωρήσουμε την ροή χωρίς ιξώδες. Θα δείξουμε ότι οι γραμμές αυτές στροβιλισμού κινούνται σαν εντοπισμένα σώματα. Η απόδειξη αυτής της βασικής ιδιότητας βασίζεται στο θεώρημα του *Kelvin* για την διατήρηση της κυκλοφορίας ενός ρευστού σωματιδίου κατά την ροή. Η κυκλοφορία όπως είδαμε συνδέεται με τη μέση τιμή του στροβιλισμού μέσω μιας επιφάνειας και δίνει την ισχύ ενός στροβίλου. Για να δούμε τις συνέπειες της δυναμικής στους στροβίλους, θα υπολογίσουμε πως η κυκλοφορία του στροβίλου $K(t)$ μεταβάλλεται με τον χρόνο, δηλ. θα υπολογίσουμε την υλική παράγωγο της κυκλοφορίας, $\frac{DK(t)}{Dt}$.

Θεώρημα *Kelvin*: Η κυκλοφορία για μια κλειστή διαδρομή C

$$K_C(t) = \oint_C \vec{u}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} \tag{4.70}$$

διατηρείται με τον χρόνο, δηλαδή

$$\frac{DK(t)}{Dt} = 0 \tag{4.71}$$

με την έννοια της υλικής παραγώγου. Με άλλα λόγια αν παρακολουθήσουμε τα σωματίδια[13] του υγρού που σχηματίζουν την κλειστή διαδρομή $C(t)$, τότε η κυκλοφορία γύρω στήν $C(t)$ είναι πάντα η ίδια. Αυτό ισχύει παρόλο που ανά πάσα χρονική στιγμή τα σωματίδια του υγρού που βρίσκονται κατά μήκος της κλειστής διαδρομής $C(t)$ θα κείνται σε καμπύλη[14] με διαφορετικό σχήμα. Εν γένει η κυκλοφορία θα έχει διαφορετική τιμή από την αρχική της τιμή. Αλλά ο *Kelvin* έδειξε ότι η κυκλοφορία παραμένει σταθερή όταν η ροή ικανοποιεί τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

[13] Η χρήση της υλικής παραγώγου προυποθέτει ότι δρά σε μια υλική ποσότητα. Στην περίπτωσή μας είναι η κυκλοφορία σε μια διαδρομή που κινείται με το ρευστό και της οποίας την χρονική εξέλιξη παρατηρούμε, δηλ $C(t)$.

[14] Στην συζήτηση υποθέτουμε ότι δεν έχουμε φαινόμενα αποφυσαλοποίησης, η οποία δημιουργεί ασυνέχειες στην ροή.

1. το υγρό είναι ανιξωδικό
2. η πυκνότητα είναι σταθερή ή μόνο συνάρτηση της πίεσης
3. οι εξωτερικές δυνάμεις όγκου που πιθανόν υπάρχουν προέρχονται από ένα δυναμικό

Στις παραπάνω προυποθέσεις δεν είναι απαραίτητο η ροή να είναι αστρόβιλη. Σε μια τέτοια περίπτωση η κυκλοφορία θα ήταν παντού μηδέν και θα είχαμε μόνο πηγές απόκλισης. Το θεώρημα απλώς μας λέει ότι άν σε κάποιο όγκο συστήματος έχουμε στροβιλισμό αυτός κινείται μαζί με το σύστημα. Εάν όμως μία από τις προυποθέσεις δεν ικανοποιείται τότε υπάρχει η δυνατότητα να μεταβάλλεται η κυκλοφορία. Στην περίπτωση του ιξώδους π.χ. έχουμε διάχυση του στροβιλισμού έξω από τον όγκο του συστήματος.

4.8.2 Απόδειξη θεωρήματος *Kelvin*

Η απόδειξη είναι εύκολη αν αντιλειφθούμε τι σημαίνει η δράση της ολικής παραγώγου στο ολοκλήρωμα της (4.70). Στην ροή, κάθε σημείο της C διαδρομής κινείται μαζί με το υγρό και επομένως η ολική μεταβολή της κυκλοφορίας οφείλεται στην ολική μεταβολή της ταχύτητας, αλλά και της διαδρομής, δηλαδή

$$\frac{DK}{Dt} = \oint_C \left\{ \frac{D\vec{u}}{Dt} \cdot d\vec{l} + \vec{u} \cdot \frac{D(d\vec{l})}{Dt} \right\}. \tag{4.72}$$

Ο πρώτος όρος στο ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση της ορμής (4.4), ενώ ο δεύτερος όρος θέλει λίγη προσοχή. Η ποσότητα $D(d\vec{l})/Dt$ είναι ο ρυθμός μεταβολής καθώς κινείται το υγρό του διανύσματος που ενώνει δύο σημεία που απέχουν κατά $d\vec{l}$. Αυτό σημαίνει ότι είναι η στιγμιαία σχετική ταχύτητα των δύο αυτών σημείων. Αυτό φαίνεται από το σχήμα (4.9) όπου το υγρό που ήταν στο σημείο $\vec{r}$, σε χρόνο δt μετατοπίζεται στο

$$\vec{r}_1 + \vec{u}(\vec{r}_1)\delta t$$

ενώ από το $\vec{r}_2$ σε χρόνο δt στο

$$\vec{r}_2 + \vec{u}(\vec{r}_2)\delta t$$

Επομένως το διάνυσμα $d\vec{l} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ μεταβάλλεται στο

$$\vec{r}_2 + u(\vec{r}_2)\delta t - \vec{r}_1 - \vec{u}(\vec{r}_1)\delta t = d\vec{l} + [\vec{u}(\vec{r}_2) - u(\vec{r}_1)]\delta t \tag{4.73}$$

Εάν τώρα βάλουμε $\vec{r_2} = \vec{r_1} + d\vec{l}$ και αναπτύξουμε το $\vec{u}(\vec{r_2})$ σε σειρά $Taylor$, έχουμε

$$u(\vec{r_2}) = u(\vec{r_1}) + (d\vec{l} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$$

και επομένως η μεταβολή του $d\vec{l}$ είναι

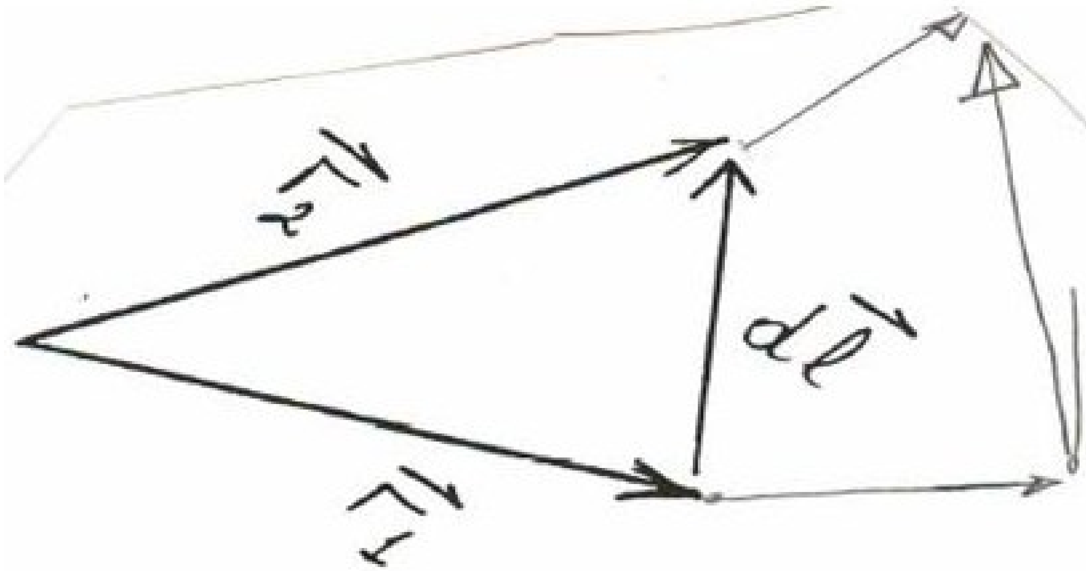
$$[\vec{u}(\vec{r}_2) - \vec{u}(\vec{r}_1)]\delta t = (d\vec{l} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = dl\frac{\partial \vec{u}}{\partial l} \tag{4.74}$$

όπου $\partial\vec{u}/\partial l$ είναι η παράγωγος στην κατεύθυνση του $d\vec{l}$. 'Ετσι

$$\vec{u} \cdot \frac{D(d\vec{l})}{Dt} = \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial l} dl = \frac{\partial(\frac{1}{2}\vec{u} \cdot \vec{u})}{\partial l} dl = d(\frac{1}{2}u^2) \tag{4.75}$$

και επομένως το ολοκλήρωμά του για μια κλειστή διαδρομή ισούται με μηδέν. Το υπόλοιπο μέρος επίσης μηδενίζεται για αστρόβιλη ροή, δηλαδή

$$\oint_C \frac{D\vec{u}}{Dt} \cdot d\vec{l} = -\oint_C \vec{\nabla} \left\{ \frac{P}{\rho} + U - \frac{1}{2}u^2 \right\} \cdot d\vec{l} = 0 \tag{4.76}$$



Σχήμα 4.9: Σχ. 4.9 Διάγραμμα για τον υπολογισμό της σχετικής ταχύτητας δύο σημείων στην διαδρομή C.

διότι στο ολοκλήρωμα έχουμε το ολικό διαφορικό

$$d\left[\frac{P}{\rho}+U-\frac{1}{2}u^2\right]$$

και η ολοκλήρωσή του σε μια κλειστή διαδρομή θα μας δώσει πάλι μηδέν.

Από την απόδειξη, αξίζει να συγκρατήσουμε δύο χρήσιμα αποτελέσματα Για ένα ομογενές ρευστό οι δυνάμεις της πίεσης δέν παράγουν στροβιλισμό σε ένα στοιχείο ρευστού. Αυτό εξηγείται διότι οι δυνάμεις πίεσης είναι πάντα κάθετες στην επιφάνεια και επομένως δεν ασκούνται ροπές στο στοιχείο. Επίσης, μία διατηρητική δύναμη όγκου, όπως είναι η βαρύτητα, δεν δημιουργεί στροβιλισμό.

Το θεώρημα $Kelvin$ αποδείχθηκε για αστρόβιλη και ανιξωδική ροή (συμπιεστή αλλά μόνο για $\rho(P)$) και έχει σημαντικές επιπτώσεις. Έστω ότι έχουμε μια ροή η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες που θέσαμε προηγουμένως και στο υγρό υπάρχει ένας μόνο σωλήνας στροβιλισμού μεγέθους K. Αυτό σημαίνει ότι αν πάρουμε μια κλειστή διαδρομή στην επιφάνεια (και γύρω από τον σωλήνα) η κυκλοφορία είναι K, και σύμφωνα με το θεώρημα του $Kelvin$ παραμένει σταθερή καθώς το υγρό ρέει. Εάν όμως πάρουμε οποιαδήποτε άλλη διαδρομή που δεν περικλείει τον σωλήνα στροβιλισμού, η κυκλοφορία παραμένει έτσι για κάθε χρονική στιγμή. Εδώ πρέπει να ξαναθυμήσουμε ότι ακολουθούμε τα σωματίδια της κλειστής διαδρομής κατά τη ροή. Έτσι λοιπόν οι στρόβιλοι κινούνται με το υγρό και διατηρούν το μέγεθός τους. Έτσι λοιπόν ο στρόβιλος αποτελείται πάντα από τα ίδια σωματίδια υγρού και αποτελεί μία αυτοτελή κινούμενη μονάδα και όταν ακόμη έχουμε αλληλεπιδράσεις μεταξύ των στροβίλων.

Εάν τώρα η κίνηση του υγρού σε μία περιοχή και σε κάποια χρονική στιγμή είναι αστρόβιλη, τότε σάυτή τη χρονική στιγμή η κυκλοφορία για οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή (εντός της αστρόβιλης περιοχής) είναι μηδενική. Θα είναι δε μηδενική και για μετέπειτα χρόνο και η ροή θα συνεχίσει να είναι αστρόβιλη. Έστω π.χ. ότι έχουμε υγρό σε ηρεμία και αυτό τίθεται σε κίνηση με μετακίνηση των ορίων του, τότε η ροή του θα είναι αστρόβιλη. Όλοι όμως έχουμε παρατηρήσει ότι αν έχουμε ένα ξύλο σε ένα ποτήρι με υγρό και το περιστρέψουμε θα δημιουργηθεί ένας στρόβιλος ο οποίος θα αυξάνει σε ακτίνα μέχρις ότου καλύψει σχεδόν όλο το ποτήρι με σταθερό στροβιλισμό σε όλη της επιφάνεια. Το ίδιο επιτυγχάνεται αν περιστρέψουμε γρήγορα το ποτήρι. Αυτές οι δύο παρατηρήσεις φαίνεται να αντιτίθενται στο θεώρημα $Kelvin$. Στην πραγματικότητα όμως όχι διότι οι δύο αυτές περιπτώσεις δεν ικανοποιούν μία από τις υποθέσεις του θεωρήματος καθόσον τα πραγματικά υγρά είναι ιξωδικά.

4.8.3 Αποκλίσεις και διαφυγή στροβιλισμού.

Ας δούμε λοιπόν σε κάθε περίπτωση πως μπορούμε να εισάγουμε στροβίλους.

α) Ιξωδική ροή. Όταν περιστρέφουμε το ποτήρι με το στάσιμο υγρό οι διατμητικές τάσεις λόγω του ιξώδους που αναπτύσσονται στην ενδοεπιφάνεια ποτηριού-υγρού δημιουργούν ροπές στο στρώμα του υγρού που γειτονεύει με την περιφέρεια του ποτηριού και επιταχύνεται μαζί του. Η ροπή αυτή διαδίδεται σταδιακά στα εσωτερικά στρώματα του υγρού. Με αυτόν τον τρόπο στροβιλισμός διαχέεται από την επιφάνεια προς το εσωτερικό όπως θα δείξουμε πιο συγκεκριμένα σε λίγο. Αρχικά ο στροβιλισμός είναι εντοπισμένος σε ένα οριακό στρώμα (δες κεφ.) του οποίου το πάχος δ αυξάνει με τον χρόνο ως $\delta \simeq \sqrt{2\mu t/\rho}$, ενώ σε εύλογο χρόνο καλύπτει όλο το υγρό. Το ίδιο συμβαίνει αν έχουμε ακίνητο υγρό σε κανάλι και μία επίπεδη πλάκα βυθισμένη στο υγρό και αρχικά ακίνητη. Στην επιφάνεια της πλάκας το γειτονικό υγρό αποκτά την ταχύτητά της. Το υγρό πολύ μακριά από αυτή παραμένει στάσιμο και μόνο σταδιακά μετά από σημαντικό χρόνο αποκτά μια μικρή ταχύτητα. Εάν τώρα πάρουμε μία διαδρομή θα δούμε ότι έχουμε κυκλοφορία και αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν στρόβιλοι στο υγρό οι οποίοι αναπτύσσονται στην επιφάνεια και μετά διαχέονται. Στην περίπτωση ιξώδους ροής είδαμε ότι στις εξισώσεις $Euler$ πρέπει να προσθέσουμε τον όρο $\mu\nabla^2\vec{u}$ και παίρνουμε την εξίσωση $Navier - Stokes$ για σταθερή πυκνότητα. Τότε το θεώρημα $Kelvin$ δεν ισχύει και στο δεξιό μέρος της (5.2) πρέπει να προσθέσουμε

$$\mu \oint_C \nabla^2\vec{u}\cdot d\vec{l}. \tag{4.77}$$

Ο όρος αυτός χρησιμοποιώντας το θεώρημα $Stokes$, μετατρέπεται σε επιφανειακό ολοκλήρωμα ώστε να γράφεται

$$\mu \int_S \nabla^2\vec{\zeta}\cdot d\vec{S} \tag{4.78}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $\vec{\zeta} = \vec{\nabla}\times\vec{u}$. Έτσι λοιπόν το θεώρημα $Kelvin$ θα ισχύει αρκετά ικανοποιητικά σε ροές με υψηλό αριθμό $Reynolds$ για αρκετά μεγάλους χρόνους, ιδιαίτερα αν η διαδρομή C στον υπολογισμό της κυκλοφορίας είναι μακριά από περιοχές όπου το ιξώδες είναι υψηλό. Το ίδιο ισχύει και για περιοχές όπου υπάρχει μεγάλη ροή θερμότητας.

β)Βαροτροπικό υγρό. Εάν η πυκνότητα δεν είναι σταθερή τότε ο όρος $\vec{\nabla}P/\rho$ στην εξίσωση $Euler$ θέλει ιδιαίτερη προσοχή. Εδώ ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις:

(ι) Η πυκνότητα είναι συνάρτηση της πίεσης, δηλαδή $\rho = f(P)$. Στην περίπτωση αυτή το θεώρημα $Kelvin$ συνεχίζει να ισχύει. Αυτό είναι έτσι καθόσον

$$\oint \vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}\right)\cdot d\vec{l} = \vec{\nabla}\int \frac{1}{\{f(P)\}}dP \tag{4.79}$$

που δίνει μηδέν πάλι για μια κλειστή διαδρομή.

(ιι) Εάν η σχέση πυκνότητας και πίεσης δεν είναι τόσο απλή (όπως αν π.χ. η ροή δεν είναι ισεντροπική) τότε ο όρος

$$\oint \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P \cdot d\vec{l}$$

δεν μηδενίζεται. Χρησιμοποιώντας όμως το θεώρημα *Stokes* μετατρέπεται στην μορφή

$$-\int_S \frac{1}{\rho^2}(\vec{\nabla}\rho \times \vec{\nabla}P) \cdot \vec{S} \tag{4.80}$$

που μας λέει ότι έχουμε μεταβολή της κυκλοφορίας με τον χρόνο αν οι επιφάνειες $P =$ σταθερά δεν είναι ταυτόχρονα και επιφάνειες με σταθερή πυκνότητα. Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια δύο παραδείγματα ροής με μη σταθερή πυκνότητα και τις συνέπειές της.

Έστω ότι έχουμε ένα αέριο ρευστό σε ηρεμία σε ένα ομογενές βαρυτικό πεδίο, ενώ το αέριο θερμαίνεται τοπικά λόγω κάποιας χημικής δράσης. Η αύξηση του όγκου του θερμαινόμενου αερίου δημιουργεί μία δύναμη άνωσης από το περιβάλλον πυκνότερο αέριο που υπερνικά το βάρος του θερμαινόμενου αερίου. Έτσι δημιουργούνται ρεύματα μεταφοράς που μεταφέρουν τον στροβιλισμό που δημιουργήθηκε στο πρώτο στάδιο της επιτάχυνσης της μάζας λόγω της ανυψωτικής δύναμης. Οι παραπάνω στρόβιλοι έχουν δημιουργηθεί μέσα στον όγκο του υγρού και επομένως σχηματίζουν δακτυλίδια.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι δύο υγρά χωρίς ιξώδες που δεν αναμειγνύονται και έχουν διαφορετικές πυκνότητας μέσα σε ένα οριζόντιο ορθογώνιο δοχείο. Όταν το σύστημα είναι σε ηρεμία υπό την επίδραση του βαρυτικού πεδίου το πυκνότερο υγρό βρίσκεται κάτω ενώ η διαχωριστική επιφάνεια είναι οριζόντια. Το σύστημα των δύο ρευστών δεν είναι βαροτροπικό καθώς η πίεση στις δύο πλευρές της ενδοεπιφάνειας είναι η ίδια, αλλά όχι η πυκνότητα. Εάν τώρα δώσουμε μία κλίση στο δοχείο, το πυκνότερο υγρό ρέει προς τα κάτω ενώ το ελαφρότερο προς τα πάνω. Έτσι στην ενδοεπιφάνεια έχουμε την δημιουργία στροβιλισμού, ο οποίος παράγεται πάλι στο εσωτερικό του υγρού.

γ) Δυνάμεις όγκου που δεν προέρχονται από δυναμικό: Εάν π.χ. εφαρμόσουμε δύναμη στο ένα άκρο ενός ύγρού και όχι στο άλλο, τότε το υγρό στο ένα άκρο θα κινηθεί ενώ στο άλλο θα μαραμείνει ακίνητο αρχικά. Έτσι αναπτύσσεται στροβιλισμός στο χώρο που αρχικά δεν είχαμε.

4.9 Διατήρηση στροφορμής

Ο παρατηρητικός αναγνώστης θα πρόσεξε ότι μέχρι τώρα δεν αναφερθήκαμε στην αρχή διατήρησης στροφορμής, αν και στην προηγούμενη παράγραφο μελετήσαμε την κυκλοφορία, μια μακροσκοπική ποσότητα που συνδέεται με την περιστροφή του ρευστού στοιχείου γύρω από άξονά του. Φυσικά η έννοια της στροφορμής ορίζεται στην μηχανική για ένα σωματίδιο γύρω από οποιοδήποτε άξονα. Δυστυχώς για μας η περίπτωση της στροφορμής του σωματιδίου δεν μπορεί να εκφραστεί στην περιγραφή *Euler*, δηλ. χρησιμοποιόντας το πεδίο ταχύτητας. Απαιτείται ανά πάσα χρονική στιγμή και η γνώση της θέσης του σωματιδίου, ποσότητα που συνδέεται με την περιγραφή *Lagrange*. Είδαμε όμως, ότι η μετάβαση απο την μία περιγραφή στην άλλη, δηλ. ο υπολογισμός των τροχιών των σωματιδίων από το πεδίο ταχύτητας, είναι πολύπλοκη διαδικασία. Αντίθετα η ορμή ενός σωματιδίου δίνεται άμεσα από την γνώση του πεδίου ταχύτητας, όπως και ο ρυθμός μεταβολής της.

Ας θεωρήσουμε την πιο απλή περίπτωση, που το στοιχείο ρευστού, $\rho\delta V$, κινείται γύρω από τον άξονα του κέντρου μάζας του. Στην μηχανική του στερεού σώματος, βρήκαμε πολύ χρήσιμη την έννοια της ροπής αδρανείας. Ιδιαίτερα για την περιστροφή ενός σώματος γύρω από ένα άξονα κεφ4-10.θπγ

Σχήμα 4.10: Σχ. 4.10. Ανιξωδική ροή σε διδιάστατο σωλήνα με κυκλική καμπή. Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις και αντίστοιχες ροπές που ασκούνται σε ένα στοιχείο ρευστού.

συμμετρίας που το διαπερνά, έχουμε $\vec{\mathcal{L}} = I\vec{\omega}$. Για μή συμμετρικό σώμα έχουμε τη σχέση για τις συνιστώσες της στροφορμής $\mathcal{L}_i = I_{ij}\omega_j$, όπου I_{ij} είναι οι συνιστώσες του τανυστή της ροπής αδρανείας καί $\vec{\omega}$ το διάνυσμα γωνιακής ταχύτητας. Για το ρευστό όμως, η έννοια της ροπής δεν είναι χρήσιμη, διότι τα στοιχεία ρευστού είναι παραμορφώσιμα και επομένως η ιδιότητα αδρανείας δεν είναι μία ιδιότητα που χαρακτηρίζει το στοιχείο ρευστού, καθόσον μεταβάλλεται με το χρόνο, ενώ και η γωνιακή ταχύτητας περιστροφής δεν είναι ίδια για όλο το στοιχείο. Είδαμε όμως ότι για το ρευστό, η έννοια του στροβιλισμου μας δίνει την πληροφορία για την τοπική περιστροφή. Είναι εύκολο να υπολογιστεί από το πεδίο ταχύτητας και γι΄ αυτό είναι πιό χρησιμή από την έννοια της στροφορμής. Ετσι αργότερα θα δούμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του στροβιλισμού θα μας δόσει χρήσιμα αποτελέσματα. Η στροφορμή για μακροσκοπικούς όγκους μπορεί να δόσει πρακτικά αποτελέσματα[15].

Ας θεωρήσουμε την μόνιμη, στρωτή και ανιξωδική διδιάστατη ροή στο Σχ. 4.10 που αποτελείται από δύο ευθύγραμμα τμήματα που ενώνονται με ένα τέταρτο κυκλικού σωλήνα και να παρακολουθήσουμε την κίνηση του τετραγωνικού στοιχείου από την αριστερή είσοδο. Ας πάρουμε τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο του κυκλικού σωλήνα. Οταν εξέρχεται από το άλλο άκρο έχει την ίδια στροφορμή όπως και στην είσοδο. Και στα δύο σημεία η ολική εξωτερική ροπή είναι μηδέν[16] καθόσον οι δυνάμεις από τα τοιχώματα η το περιβάλλον ρευστό είναι κάθετες στην επιφάνεια του τετραγώνου. Κατά μήκος της καμπής, έχουμε παραμόρφωση και διαφορετική πίεση στα δύο τοιχώματα. Αυτό δίνει καθαρή ροπή η οποία αλλάζει φορά στο μέσο της καμπής, έτσι ώστε να έχει την ίδια στροφορμή κατά την έξοδο, παρόλο που κατά μήκος της καμπής η στροφορμή μεταβάλλεται με το χρόνο.

4.10 Μακροσκοπικοί νόμοι διατήρησης

Μέχρι τώρα δώσαμε τους τοπικους νόμους διατήρησης οι οποίοι εκφράζονται με την μορφή διαφορικών εξισώσεων, ακολουθόντας την συμπεριφορά σωματιδίων όπως στην κλασσική μηχανική. Μία σημαντική δυσκολία είναι ότι τα σωματίδια έχουν όγκο και είναι παραμορφώσιμα. Το μόνο κοινό που έχουν με τα σωματίδια της κλασσικής μηχανικής είναι ότι έχουν σταθερή μάζα. Η πολυπλοκότητα της μορφολογίας των ρευστών σωματιδίων μπορεί να αποφευχθεί αν μπορούμε να επιλέξουμε απλούς όγκους που παραμένουν σταθεροί σε όγκο αλλά φυσικά δεν μπορούν να διατηρούν σταθερή τη μάζα τους. Αυτό λύνει μία πολυπλοκότητα, αλλά δημιουργεί μία άλλη. Οι νόμοι του Νεύτωνα έχουν διατυπωθεί για σωματίδια με σταθερή μάζα. Το ερώτημα γεννάται αν

[15] Για την περίπτωση όμως που έχουμε ένα μακροσκοπικό όγκο τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την στροφορμή του ρευστού σε κάποια χρονική στιγμή. Θα δούμε αργότερα πως μπορούμε να υπολογίσουμε τον ρυθμό μεταβολής του, με το θεώρημα *Reynolds*, ώστε να εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης του, υποθέτοντας ότι γνωρίζουμε και τις εξωτερικές ροπές που ασκούνται στον όγκο.

[16] Στά δύο άκρα η ταχύτητα είναι σταθερή στην επιφάνεια της διατομής. Για να επιτευχθεί αυτό, ίσως απαιτούνται στα δύο άκρα δύο έμβολα.

Σχήμα 4.11: Σχ. 4.11. Παραμόρφωση υλικού όγκου κατά την ροή κατά μήκος μιας ροικής γραμμής.

μπορούμε να γράψουμε τους νόμους του Νεύτωνα για σωματίδια μεταβλητής μάζας. Αυτό θα διερευνήσουμε στη συνέχεια και αφήνουμε την απάντηση για αργότερα. Ταυτόχρονα σε πολλές εφαρμογές χρειάζεται να υπολογίσουμε μακροσκοπικές ποσότητες. Και για τους δύο παραπάνω λόγους είναι χρήσιμο να διατυπώσουμε τους βασικούς νόμους διατήρησης για μακροσκοπικούς όγκους. Φυσικά στο όριο που ο όγκος μηδενίζεται πρέπει να μας δίνουν τις τοπικές σχέσεις.

4.10.1 Νόμοι διατήρησης για υλικό όγκο

Οπως είδαμε συχνά χρειάζεται να υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής μιάς φυσικής ποσότητας ενός ρευστού σωματιδίου σε κίνηση. Να θυμηθούμε ότι στην έννοια του σωματιδίου έχουμε σταθερή μάζα αλλά όχι όγκο. Αλλά υπάρχουν και άλλες ποσότητες (π.χ. ορμή, ενέργεια κτλ.) που μας ενδιαφέρουν για το πως μεταβάλλονται κατά την κίνηση του ρευστού σωματιδίου. Το πρόβλημα όμως είναι ότι καθώς το σωματίδιο κινείται αφ΄ ενός μεταφέρει μαζί του την αντίστοιχη φυσική ποσότητα, αφ΄ ετέρου μετακινείται σε περιοχές με διαφορετικές τιμές. Η δυσκολία όμως είναι ότι παράλληλα και ο όγκος του μεταβάλλεται. Επειδή όμως ο όγκος μεταβάλλεται με το χρόνο, θα ήταν δύσκολο κάθε φορά να πρέπει να υπολογίσουμε το νέο όγκο και την αντίστοιχη ποσότητα, για να υπολογίσουμε τελικά το ρυθμό μεταβολής της φυσικής ποσότητας.

Για να γίνει ορατή η μαθηματική δυσκολία ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που κινείται κατά μήκος της τροχιάς του σχήματος 4.11 ενώ περικλείεται από μία χρονικά μεταβαλλόμενη υλική επιφάνεια $S_m(t)$, που περικλείει τον υλικό όγκο $V_m(t)$ του σωματιδίου μας[17]. Η μάζα του

[17] Εδώ χρησιμοποιούμε την έννοια του σωματιδίου διότι μας ενδιαφέρουν οι τοπικοί νόμοι διατήρησης. Σε εφαρμογές όμως της υδροδυναμικής μας ενδιαφέρει η ροή μακροσκοπικών ποσοτήτων ρευστού και γι΄ αυτό ορίζουμε τον υλικό όγκο, ο οποίος όπως και το σωματίδιο έχει την ιδιότητα ότι διατηρεί σταθερή μάζα κατά τη ροή. Εν γένει ο υλικός όγκος είναι ένας τυχαία επιλεγμένος όγκος σε κάποια χρονική στιγμή, με τον εξής περιορισμό. Τα σημεία στην επιφάνεια κινούνται με την ταχύτητα ροής στο σημείο η οποία μεταβάλλεται με τον χρόνο. Αυτό ικανοποιεί και την έννοια του σωματιδίου, διότι δεν έχουμε μεταφορά μάζας μέσω της επιφάνειας και ο υλικός όγκος έχει σταθερή μάζα.

σωματιδίου μπορεί να γραφεί ως

$$M = \int_{V_m(t)} \rho dV, \tag{4.81}$$

και ο ρυθμός μεταβολής καθώς το σωματίδιο κινείται είναι μηδέν εξ ορισμού

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{V_m(t)} \rho dV = 0. \tag{4.82}$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να το γενικεύσουμε για οποιαδήποτε φυσική εκτατική ποσότητα $B(t)$ ολοκληρώνοντας στην αντίστοιχη εντατική $b(\vec{r},t)$ που είναι η πυκνότητα της $B(t)$ ανά μονάδα μάζας. Εχουμε δηλ.

$$B(t) = \int_{V_m(t)} \rho b(\vec{r},t) dV, \tag{4.83}$$

όπου για $b(\vec{r},t) = 1$ έχουμε το ολοκλήρωμα για τη μάζα του σωματιδίου. Οι ποσότητες B και b μπορεί να είναι και διανυσματικές. Ετσι για την ορμή στον υλικό όγκο $\vec{\mathcal{P}}$, η αντίστοιχη πυκνότητα ανά μονάδα μάζας είναι η ταχύτητα $\vec{u}$, και έχουμε

$$\vec{\mathcal{P}}(t) = \int_{V_m(t)} \rho \vec{u}(\vec{r},t) dV, \tag{4.84}$$

όπου $\rho\vec{u}(\vec{r},t)$ είναι η πυκνότητα ορμής ανά μονάδα όγκου. Αντίστοιχα για την ενέργεια έχουμε την πυκνότητα ενέργειας $\varepsilon(\vec{r},t)$, και

$$E(t) = \int_{V_m(t)} \rho \varepsilon(\vec{r},t) dV. \tag{4.85}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της εκτατικής ποσότητας $B(t)$ δίνεται από την σχέση

$$\frac{DB(t)}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{V_m(t)} \rho b(\vec{r},t) dV, \tag{4.86}$$

και οι ποσότητες αυτές εισέρχονται στους νόμους διατήρησης κατά το πνεύμα $Lagrange$, που πρέπει να υπολογιστεί χρησιμοποιόντας την περιγραφή του πεδίου κατά $Euler$. Π.χ. για την διατήρηση μάζας έχουμε την σχέση

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{V_m(t)} \rho dV = 0,, \tag{4.87}$$

ενώ για την διατήρηση της ορμής

$$\frac{D\vec{\mathcal{P}}(t)}{Dt} \equiv \frac{D}{Dt}\int_{V_m(t)} \rho \vec{u}(\vec{r},t) dV = \vec{F}_m(t) \tag{4.88}$$

όπου $\vec{F}_m(t)$ είναι η ολική δύναμη που ασκείται στον υλικό όγκο $V_m(t)$. Η δύναμη αυτή περιλαμβάνει δυνάμεις όγκου (π.χ. βαρύτητα) η επιφανειακές δυνάμεις στο όριο $S_m(t)$, αλλά δεν περιλαμβάνει δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ σωματιδίων εντός του υλικού όγκου, διότι αυτές αναιρούνται ανά ζεύγη (δράση και αντίδραση) όταν προσθέσουμε τις δυνάμεις σε όλα τα σωματίδια του υλικού όγκου. Φυσικά αναφερόμαστε σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς και μη σχετικιστικές ταχύτητες.

Με το ίδιο σκεπτικό μπορούμε να γράψουμε και τον νόμο διατήρησης της στροφορμής του όγκου.

$$\frac{D\vec{\mathcal{L}}(t)}{Dt} \equiv \frac{D}{Dt}\int_{V_m(t)} \rho\vec{r}\times\vec{u}(\vec{r},t)dV = \vec{\mathcal{T}}_m(t) \equiv \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \tag{4.89}$$

Η σχέση αυτή βγαίνει αν γράψουμε την αρχή διατήρησης στροφορμής για κάθε σωματίδιο του ογκου και στη συνέχεια προσθέσουμε για όλα τα σωματίδια στον όγκο. Τότε στο δεξιό μέρος έχουμε την ολική ροπή που ασκείται από τα εξω, ενώ οι ροπές των δυνάμεων μεταξύ σωματιδίων (εκτός ειδικών περιπτώσεων) μηδενίζονται πάλι ανά ζεύγη. Οπως και στην κλασσική μηχανική η αρχή διάτήρησης στροφορμής δεν είναι καινούργιος νόμος αλλά επακόλουθο της εξίσωσης κίνησης του Νεύτωνα.

Ο αντίστοιχος νόμος διατήρησης για την ενέργεια είναι

$$\frac{DE(t)}{Dt} \equiv \frac{D}{Dt}\int_{V_m(t)} \rho\varepsilon(\vec{r},t)dV = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} \tag{4.90}$$

όπου η ολική ενέργεια περιλαμβάνει κινητική, δυναμική και εσωτερική ενέργεια, ενώ ο πρώτος όρος στο δεξιό μέρος είναι ο ρυθμός με τον οποίο θερμότητα εισέρχεται έξω από το όγκο μέσω της υλικής επιφάνειας, και ο δεύτερος όρος το ολικό έργο που γίνεται από έξω μέσω της επιφάνειας. Αυτό αφορά το έργο της πίεσης για μη ιξωδικά ρευστά η το έργο των ιξωδικών δυνάμεων όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 6.

4.10.2 Μετατροπή σε όγκο ελέγχου και θεώρημα μεταφοράς *Reynolds*

Οι προηγούμενοι νόμοι είναι σε μία μορφή που δεν είναι εύχρηστη για εφαρμογές. Και τούτο διότι κατά την ροή έχουμε παραμόρφωση του υλικού όγκου[18]. Το πρόβλημα, όμως είναι ότι αυτή η παραμόρφωση δεν είναι εκ των προτέρω γνωστή και απαιτεί την προηγούμενη λύση του προβλήματος. Τα πράγματα θα ήταν πιό εύκολα εάν είχαμε να κάνουμε με ένα όγκο της επιλογής μας[19] με γνωστή παραμόρφωση. Τότε τουλάχιστον η περιοχή ολοκλήρωσης είναι γνωστή, αλλά δημιουργείται το πρόβλημα ότι ο αντίστοιχος νόμος δεν μας δίνει το ρυθμό μεταβολής κατά την

[18] Ακόμη και για ασυμπίεστη ροή με σταθερή πυκνότητα, πάλι έχουμε παραμόρφωση του υλικού όγκου που προσδιορίζεται από τις οριακές συνθήκες και το αντίστοιχο πεδίο ταχύτητας. Να υπενθυμήσουμε ότι υλικός όγκος είναι ο όγκος που περιέχει πάντα την ίδια μάζα, αλλά παραμορφώνεται κατά τρόπο ωστε η εξωτερική επιφάνεια (ονομάζεται υλική επιφάνεια) κινείται με την ταχύτητα ροής των σωματιδίων σε κάθε σημείο της επιφάνειας.

[19] Ενας τέτοιος όγκος ονομάζεται όγκος ελέγχου. Εν γένει ένας όγκος ελέγχου περικλείεται από μία επιφάνεια (επιφάνεια ελέγχου) διαφανή στη ροή, η οποία διαχωρίζει το ρευστό στο εσωτερικό της από το υπόλοιπο σύστημα. Μπορεί δε να είναι στατικό, όπως συχνα χρησιμοποιείται για την λύση πρακτικών προβλημάτων, η να κινείται στο σύστημα αναφοράς η να μεταβάλει τον όγκο κατά δεδομένο τρόπο. Το τελευταίο είναι η διαφορά από τον υλικό όγκο του οποίου η μεταβολή καθορίζεται από τους νόμους διατήρησης, και επομένως προυποθέτει γνώση της ροής, και αυτός ήταν ο λόγος που θέλουμε να τον αποφύγουμε. Από την άλλη πλευρά πρέπει να είναι φανερό, ότι ένας όγκος ελέγχου δεν διατηρεί την μάζα στο εσωτερικό του, και αυτό θα απαιτήσει προσοχή στην διατύπωση των νόμων διατήρησης. Το πρόβλημα μπορεί να παραλληλιστεί με αυτό μιας κινούμενης ρουκέτας, η οποία κατά την κίνηση χάνει μέρος της μάζας. Αυτή ακριβώς την δυσκολία πρέπει να αντιμετωπίσουμε στη συνέχεια.

Ενας όγκος ελέγχου που είναι σταθερός στο χώρο είναι στο πνεύμα της περιγραφής *Euler*. Οπως και το πεδίο ροής ορίζεται στο χώρο και εδώ μας ενδιαφέρει τι γίνεται με το περιεχόμενο ορμής η ενέργειας σε μια επιλεγμένη περιοχή του χώρου. Το πρόβλημα φυσικά είναι ότι οι νόμοι διατήρησης που διατυπώσαμε προηγουμένως δεν ισχύουν στην μορφή που δώσαμε για υλικό όγκο. Ετσι η περιγραφή για υλικό όγκο είναι στο πνεύμα *Lagrange*.

κίνηση του σωματιδίου. Αυτό όμως μπορούμε να το ξεπεράσουμε εάν στην χρονική στιγμή t διαλέξουμε τον όγκο ελέγχου να συμπίπτει με τον υλικό όγκο στον οποίο την μεταβολή της φυσικής ποσότητας θέλουμε να υπολογίσουμε. Τις λεπτομέρειες θα δούμε σε λίγο. Αλλά το αποτέλεσμα θα μας οδηγήσει στην διατύπωση ενός σημαντικού θεωρήματος του $Reynolds$, το οποίο μας δίνει την δυνατότητα να γράψουμε τους βασικούς νόμους διατήρησης χρησιμοποιόντας ένα όγκο της επιλογής μας.

Για τον σκοπό αυτό θα αρχήσουμε από τον ρυθμό μεταβολής της φυσικής ποσότητας $B(t)$ στον όγκο ελέγχου $V_c(t)$ τον οποίο διαλέγουμε έτσι ώστε κάθε σημείο της επιφάνειας ελέγχου κινείται με μία ταχύτητα $\vec{u}_c(\vec{r},t)$. Χρησιμοποιόντας

$$\phi(\vec{r},t) \equiv \rho(\vec{r},t)b(\vec{r},t)$$

έχουμε λοιπόν

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_c(t}\phi(\vec{r},t)dV = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{V_c(t+\Delta t)}\phi(\vec{r},t+\Delta t)dV - \int_{V_c(t)}\phi(\vec{r},t)dV}{\Delta t}. \tag{4.91}$$

όπου το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίζεται στον όγκο και τις αντίστοιχες φυσικές ποσότητες σε χρόνο $t+\Delta$ και το δεύτερο σε χρόνο t. Αναπτύσοντας την ποσότητα στο πρώτο ολοκλήρωμα σε σειρά $Taylor$ έχουμε

$$\phi(\vec{r},t+\Delta t) = \phi(\vec{r},t) + \frac{\partial\phi}{\partial t}\Big|_t \Delta t,$$

και αντικαθιστώντας στην (4.91) έχουμε

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_c(t}\phi(\vec{r},t)dV = \int_{V_c(t)}\frac{\partial\phi(\vec{r},t)}{\partial t}dV + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{V_c(t+\Delta t)}\phi(\vec{r},t)dV - \int_{V_c(t)}\phi(\vec{r},t)dV}{\Delta t} \tag{4.92}$$

όπου στον πρώτο όρο παραλείψαμε στο πνεύμα του ορίου την διαφορά όγκου, η οποία μηδενίζεται επίσης στο όριο $\lim_{\Delta t\to 0}$. Η διαφορά των ολοκληρωμάτων στον δεύτερο όρο μπορεί να υπολογιστεί σαν επιφανειακό ολοκλήρωμα στην επιφάνεια ελέγχου. Αυτό φαίνεται από το σχήμα 4.12. Η διαφορά τους είναι απλούστατα η συνολική ποσότητα ϕ που έχει περάσει μέσω της επιφάνειας ελέγχου $S_c(t)$, και αν διαιρέσουμε με Δt μας δίνει τον αντίστοιχο ρυθμό ροής. Εχουμε λοιπόν

$$\int_{V_c(t+\Delta t)}\phi(\vec{r},t)dV - \int_{V_c(t)}\phi(\vec{r},t)dV = \int_{S_c(t)}\phi(\vec{r},t)\Delta t\vec{u}_c\cdot\hat{n}dS, \tag{4.93}$$

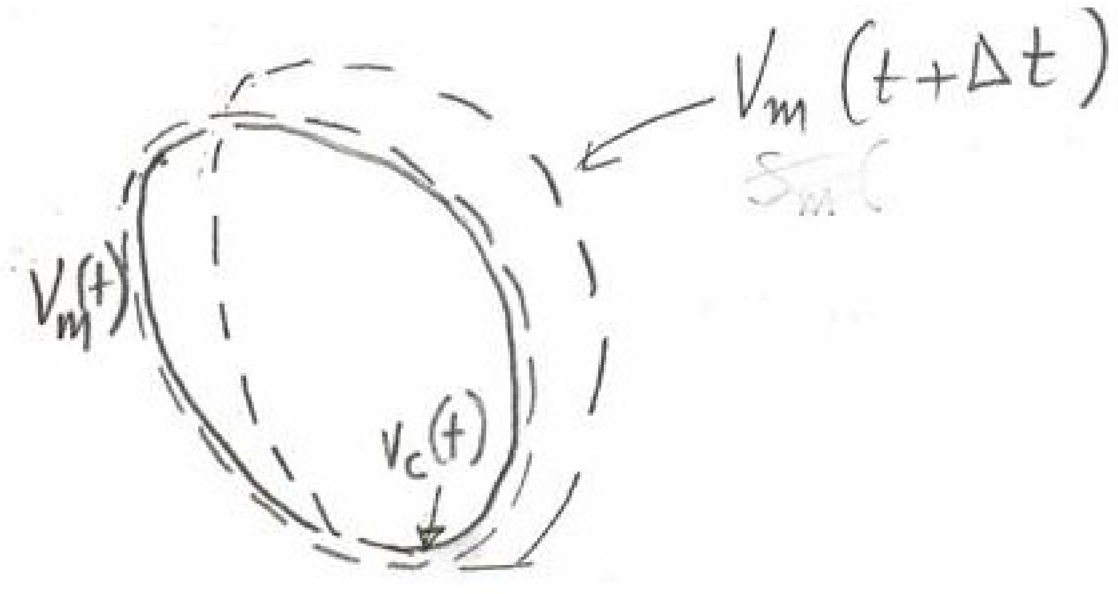
όπου $\hat{n}$ είναι η εξωτερική κάθετος στην επιφάνεια ελέγχου $S_c(t)$ στο στοιχείο dS, και $\Delta t\vec{u}_c\cdot\hat{n}dS$ είναι η αύξηση του όγκου ελέγχου στον χρόνο Δt, λόγω της μετατόπισης του στοιχείου επιφάνειας dS κατά $\Delta t\vec{u}_c\cdot\hat{n}$. Προσθέτοντας για την μετατόπιση όλων των στοιχείων επιφάνειας μας δίνει το επιφανειακό ολοκλήρωμα στην επιφάνεια ελέγχου $S_c(t)$. Η ποσότητα ϕ στό μικρό αυτό διάστημα μετατόπισης μπορεί να θεωρηθεί ότι δεν μεταβάλλεται, αλλά φυσικά μεταβάλλεται κατά μήκος της επιφάνειας.

Αντικαθιστώντας την (4.93) στην (4.93) έχουμε για τον ρυθμό στον επιλεγμένο όγκο ελέγχου

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_c(t)}\phi(\vec{r},t)dV = \int_{V_c(t)}\frac{\partial\phi(\vec{r},t)}{\partial t}dV + \int_{S_c(t)}\phi(\vec{r},t)\vec{u}_c\cdot\hat{n}dS, \tag{4.94}$$

Εάν τώρα επιλέξουμε στην χρονική στιγμή t ο όγκος ελέγχου $V_c(t)$ να συμπίπτει με τον υλικό όγκο, και η γνωστή ταχύτητα $\vec{u}_c$ αντικατασταθεί από την άγνωστη ταχύτητα ροής στην υλική επιφάνεια, τότε έχουμε το αντίστοιχο αποτέλεσμα για τον ρυθμό μεταβολής στον υλικό όγκο

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_m(t)}\phi(\vec{r},t)dV = \int_{V_m(t)}\frac{\partial\phi(\vec{r},t)}{\partial t}dV + \int_{S_m(t)}\phi(\vec{r},t)\vec{u}\cdot\hat{n}dS, \tag{4.95}$$



Σχήμα 4.12: Σχ. 4.12. Μετατόπιση επιφάνειας ελέγχου λόγω της επιλεγμένης ταχύτητας $\vec{u}_c(\vec{r},t)$ και υπολογισμός της μεταβολής του όγκου ελέγχου για την (4.93).

Η σχέση αυτή ονομάζεται *Θεώρημα μεταφοράς Reynolds*, και το φυσικό της νόημα είναι προφανές. Σε κάθε χρονική στιγμή

Ρυθμός μεταβολής κατά την ροή	=	Τοπικός ρυθμός μεταβολής σε κάθε σημείο	+	Καθαρή ροή μέσω της επιφάνειας.

Μπορούμε όμως να κάνουμε και τον εξής συλλογισμό. Εστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την υλική μεταβολή σε χρόνο $t = t^*$. Για το αριστερό μέρος της (4.95) πρέπει πρώτα να κάνουμε την παραγώγιση και στην συνέχεια να αντικαταστήσουμε $t = t^*$. Φυσικά δεν σκοπευουμε να κάνουμε αυτόν τον υπολογισμό, καθώς μπορούμε να πάρουμε το δεξιό μέρος της (4.95). Αλλά σε χρόνο t^* πάντα μπορώ να βρώ ένα στάσιμο όγκο και στάσιμη επιφάνεια που ισούνται με τις ίδιες ποσότητες του υλικού όγκου και επιφάνειας, δηλ. $V_c = V_m(t^*)$ $S_c = S_m(t^*)$. Ετσι για τον υπολογισμό του δεξιού μέρους μπορώ να αντικαταστήσω τα όρια ολοκλήρωσης σε σταθερό όγκο και επιφάνεια ελέγχου για την χρονική στιγμή t^*. Τότε έχουμε μία άλλη μορφή για το θεώρημα μεταφοράς *Reynolds*,

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_m(t)} \phi(\vec{r},t)dV = \int_{V_c} \frac{\partial\phi(\vec{r},t)}{\partial t}dV + \int_{S_c} \phi(\vec{r},t)\vec{u}\cdot\hat{n}dS, \tag{4.96}$$

που μετατρέπει την υλική παράγωγο ενός ολοκληρώματος σε παραμορφώσιμο όγκο, σε ένα άθροισμα ολοκληρωμάτων με σταθερό όγκο και επιφάνεια αντίστοιχα, που ήταν και ο στόχος μας. Επειδή δε ο όγκος ελέγχου V_c είναι σταθερός μπορούμε να πάρουμε την μερική παραγώγιση έξω από το ολοκλήρωμα. Ο πρώτος όρος στο δεξιό μέρος είναι το ολοκλήρωμα όγκου της μερικής παραγώγου ως προς τον χρόνο της ϕ στόν όγκο ελέγχου σε χρόνο t, κρατώντας σταθερή την επιφάνεια ελέγχου, και υπάρχει όταν έχουμε μη μόνιμη ροή. Ο δεύτερος όρος εκφράζει το γεγονός ότι το όριο του υλικού όγκου δεν κρατά την μορφή που είχε σε χρόνο t αλλά περιλαμβάνει περισσότερο όγκο, και επομένως και περισσότερο από την ποσότητα ϕ, καθώς εξελλίσεται χρονικά.

Ενας μνημονικός κανόνας για το θεώρημα *Reynolds* είναι ότι για να υπολογίσουμε τον υλικό ρυθμό μεταβολής κάποιας φυσικής ποσότητας, αυτός αποτελείται από δύο όρους. Ο ένας έχει να κάνει με την τοπική χρονική μεταβολή στον όγκο, και ο δεύτερος με το γεγονός ότι στο όγκο ελέγχου εισρέει ρευστό μέσω της επιφάνειας από γειτονικές περιοχές. Αυτό εκφράζεται με το ρυθμό ροής της αντίστοιχης ποσότητας μέσω της επιφάνειας. Ο ρυθμός ροής μέσω της επιφάνειας δίνεται από το εσωτερικό γινόμενο του αντίστοιχου ρεύματος $\phi\vec{u}$ με το στοιχείο της επιφάνειας $\hat{n}dS$. Την παραπάνω διαδικασία είχαμε χρησιμοποιήσει για την απόδειξη της εξίσωσης συνέχειας στο Κεφ. 2.

Για την περίπτωση που η ροή είναι μόνιμη τότε μόνο το επιφανειακό ολοκλήρωμα συνεισφέρει, και έχουμε

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_m(t)}\phi(\vec{r},t)dV = \int_{S_c(t)}\phi(\vec{r},t)\vec{u}\cdot\hat{n}dS, \qquad \text{μόνιμη ροή}. \tag{4.97}$$

Επίσης αν θεωρήσουμε μόνιμη ροή σε ένα σύστημα με κλειστά τοιχώματα, εκτός από εισόδους η εξόδους με σταθερή ταχύτητα ροής στην διατομή τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα απλοποιείται σαν ένα διακριτό άθροισμα στις εισόδους και εξόδους

$$\int_{S_c(t)}\phi(\vec{r},t)\vec{u}\cdot\hat{n}dS = \sum_{i,\ \text{εξόδους}}(\phi u_n A)_i - \sum_{j,\ \text{εισόδους}}(\phi u_n A)_j, \tag{4.98}$$

όπου u_n είναι η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στην αντίστοιχη επιφάνεια εισόδου η έξόδου.

4.10.3 Σωματιδιακό όριο του υλικού όγκου

Αξίζει να δούμε τι μας λέει το θεώρημα *Reynolds* στην μορφή (4.95), αφού αντικαταστήσουμε $\phi = \rho b$, όταν ο υλικός όγκος γίνει ελάχιστος (δV). Τότε το δεξιό μέρος μας δίνει την υλική παράγωγο του b, επί την μάζα, δηλ. $\rho\delta V\frac{Db}{Dt}$ καθώς η μάζα $\rho\delta V$ είναι σταθερή. Το ολοκλήρωμα όγκου στο δεξιό μέρος είναι για σταθερό όγκο (ίσο με δV) και μας δίνει $\delta V\frac{\partial}{\partial t}(\rho b)$. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα μετατρέπεται με το θεώρημα *Gauss* πρώτα σε ολοκλήρωμα όγκου και μας δίνει $\delta V\vec{\nabla}\cdot(\rho b\vec{u})$. Προσθέτοντας τους δύο όρους και διαιρώντας με τον όγκο δV έχουμε

$$\rho\frac{Db}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho b) + \vec{\nabla}\cdot(\rho b\vec{u}). \tag{4.99}$$

Εάν ορίσουμε

$$\vec{\jmath}_b = \vec{\nabla}\cdot(\rho b\vec{u}) \tag{4.100}$$

το ρεύμα ανά μονάδα όγκου της ποσότητας b, τότε η απόκλισή του είναι ακριβώς η συνεισφορά από το γεγονός ότι ο όγκος του σωματιδίου έχει αλλάξει. Μετα από απλές πράξεις και χρησιμοποιόντας την εξίσωση συνέχειας έχουμε

$$\rho\frac{Db}{Dt} = \rho\frac{\partial b}{\partial t} + b\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho b\vec{u}) = \tag{4.101}$$

$$\rho\frac{\partial b}{\partial t} - b\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) + \vec{\nabla}\cdot(\rho b\vec{u}) = \rho\frac{\partial b}{\partial t} + \rho(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})b, \tag{4.102}$$

που δεν είναι τίποτε άλλο παρά ο ορισμός της υλικής παραγώγου. Η παραπάνω σχέση ισχύει και για κάθε συνιστώσα κάποιας διανυσματικής ποσότητας ανά μονάδα μάζας. Π.χ. για κάθε συνιστώσα της ταχύτητας (ορμή ανά μονάδα μάζας) η της αντίστοιχης πυκνότητας στροφορμής $vecr\times\vec{u}$. Ετσι για διανυσματική ποσότητα έχουμε

$$\rho\frac{D\vec{b}}{Dt} = \rho\frac{\partial\vec{b}}{\partial t} + \rho(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{b}. \tag{4.103}$$

Καθώς το b είναι κάποια φυσική ποσότητα ανά μονάδα μάζας, στην (4.102) η (4.103) έχουμε το αριστερό μέρος του αντίστοιχου νόμου διατήρησης. Στό δεξιό μέρος πρέπει να προσθέσουμε τις αντίστοιχες πηγές. Π.χ για την διατήρηση μάζας $b = 1$ και στο δεξιό μέρος έχουμε μηδέν εκτός αν έχουμε πηγές δημιουργίας νέας μάζας. Για την διατήρηση ορμής $\vec{b} = \vec{u}$ στο δεξιό μέρος έχουμε όλες τις εξωτερικές δυνάμεις (επιφανείας και όγκου) ανά μονάδα όγκου. Για την διατήρηση στροφορμής $\vec{b} = \vec{r} \times \vec{u}$ και στό δεξιό μέρος τις ροπές ανά μονάδα όγκου των εξωτερικών δυνάμεων. Δυστυχώς όπως είπαμε, η σχέση για την διατήρηση στροφορμής του σωματιδίου δεν είναι εύχρηστη, καθόσον απαιτείται η γνώση της θέσης του σωματιδίου ανά πάσα χρονική στιγμή.

4.10.4 Νόμοι διατήρησης σε επιλεγμένο όγκο ελέγχου

Το θεώρημα *Reynolds* μπορεί να εκφραστεί και σε άλλες μορφές που ίσως είναι πιο πρακτικές για την επίλυση προβλημάτων. Μία κατεύθυνση που έχει μεγάλο ενδιαφέρον για πρακτικά προβλήματα είναι να πάμε στην άλλη κατεύθυνση και να εκφράσουμε τους βασικούς νόμους διατήρησης σαν ρυθμούς μεταβολών πάνω σε επιλεγμένους όγκους ελέγχου, οι οποίοι συχνά υποδεικνύονται από την εφαρμογή. Αυτό μας δίνει την δυνατότητα να κρατήσουμε τους μακροσκοπικούς νόμους, ιδιαίτερα αν η πληροφορία που θέλουμε είναι μακροσκοπικές ποσότητες, όπως π.χ. η δύναμη πάνω στα τοιχώματα ενός αγωγού.

Η διαδικασία είναι πολύ απλή. Για τους τρείς βασικούς νόμους διατήρησης μάζας ορμής και ενέργειας αντικαθιστούμε στην (4.96) για ϕ αντίστοιχα την πυκνότητα ρ, την πυκνότητα ορμής $\rho\vec{u}$, την πυκνότητα στροφορμής $\rho\vec{r} \times \vec{u}$, και την πυκνότητα ενέργειας $\rho\varepsilon$ ανά μονάδα όγκου αντίστοιχα. Για κάθε νόμο εκφρασμένο σε υλικό όγκο, π.χ. στις σχέσεις (4.82), (4.88), (4.89), και (4.90), αντικαθιστούμε το δεξιό μέρος του νόμου, χρησιμοποιόντας το θεώρημα *Reynolds* από την (4.95), ωστε να έχουμε ολοκληρώματα σε σταθερό όγκο και επιφάνεια ελέγχου. Τρίτον πρέπει να βεβαιωθούμε ότι το δεξιό μέρος των νόμων δηλ. η δύναμη, η ροπή κτλ. δεν μεταβάλλονται όταν τα υπολογίσουμε στον όγκο ελέγχου αντί στον υλικό όγκο. Θέλει όμως και προσοχή, διότι π.χ. το έργο που γίνεται από τις δυνάμεις στην επιφάνεια ελέγχου διαφέρει από τις δυνάμεις στην υλική επιφάνεια, καθώς κινούνται με διαφορετική ταχύτητα.

Ετσι για την διατήρηση της μάζας, έχουμε

$$\int_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S_c} \rho \vec{u} \cdot \hat{n} dS = 0 \tag{4.104}$$

και είναι η μορφή που χρησιμοποιήσαμε στο Κεφ. 3 για την εξαγωγή της εξίσωσης συνέχειας.

Για την διατήρηση ορμής έχουμε

$$\int_{V_c} \frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} dV + \int_{S_c} (\rho \vec{u}) \vec{u} \cdot \hat{n} dS = \vec{F}_c, \tag{4.105}$$

όπου $\vec{F}_c$ είναι το άθροισμα των δυνάμεων όγκου και επιφάνειας στη μάζα του όγκου ελέγχου και είναι ίδια με αυτή στον υλικό όγκο. Για μία συνεχή κατανομή έχουμε

$$\vec{F}_c = \int_{V_c} \rho \vec{f} dV + \int_{S_c} \vec{\sigma}_s dS, \tag{4.106}$$

όπου $\vec{f} = \vec{g}$ είναι δύναμη ανά μονάδα όγκου για την βαρύτητα και $\vec{\sigma}_s$ είναι η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας στο στοιχείο επιφάνειας dS. Για ανιξωδική ροή έχουμε $\vec{\sigma}_s = -P\hat{n}$, όπου $\hat{n}$ είναι η εξωτερική κάθετος στο στοιχείο dS. Η (4.105) μας λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής στον σταθερό όγκο ελέγχου (που ισούται με τον υλικό όγκο σε χρόνο t), συν ο ρυθμός ροής ορμής προς τα έξω μέσω της σταθερής επιφάνειας ελέγχου, σε κάθε χρονική στιγμή ισούται με την δύναμη που ασκείται στον όγκο ελέγχου από τον έξω κόσμο.

Συχνά σε ένα μακροσκοπικό όγκο δεν μας ενδιαφέρει η λεπτομερής γνώση της ροής στο εσωτερικό αλλά και δεν είναι πάντα προσιτή. Αντίθετα είναι πιο εύκολο να γνωρίζουμε την ροή στην επιφάνεια ενός όγκου. Αυτό σημαίνει ότι είναι χρήσιμο να δούμε αν οι νόμοι διατήρησης (κι΄ εδώ θα περιοριστούμε μόνο στην διατήρηση ορμής) μπορούν να γραφούν μόνο συναρτήσει επιφανειακών ολοκληρωμάτων. Αυτό μπορεί να γίνει αν η ροή μας είναι μόνιμη και οι δυνάμεις όγκου (όπως η βαρύτητα) είναι διατηρητικές. Ετσι για μόνιμη ροή το ολοκλήρωμα όγκου στην (4.105) δεν υπάρχει. Επίσης για διατηρητική δύναμη όγκου μπορούμε να την ορίσουμε χρησιμοποιόντας το δυναμικό ανά μονάδα μάζας ϕ ως

$$\rho\vec{f} = -\vec{\nabla}(\rho\phi)$$

και να γράψουμε την συνεισφορά της δύναμης όγκου σαν επιφανειακό ολοκλήρωμα. Ετσι έχουμε

$$\int_{V_c} \rho\vec{f} dV = \int_{S_c} (-\rho\phi)\hat{n}_s dS, \tag{4.107}$$

όπου $\hat{n}_s$ είναι το εξωτερικό κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια σε κάθε σημείο.

Για την στροφορμή έχουμε

$$\int_{V_c} \frac{\partial(\rho\vec{r}\times\vec{u})}{\partial t} dV + \int_{S_c} (\rho\vec{r}\times\vec{u})\vec{u}\cdot\hat{n} dS = \vec{T}_c. \tag{4.108}$$

Εδώ $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης για μία αυθαίρετη αρχή αξόνων σε ένα αδρανειακό σύστημα. Η ολική ροπή αναφέρεται και αυτή ως προς το ίδιο σημείο και είναι το άθροισμα όλων των ροπών για δυνάμεις (όγκου και επιφάνειας) που ασκούνται από τον έξω κόσμο στη μάζα του όγκου. Για μία συνεχή κατανομή δυνάμεων έχουμε

$$\vec{T}_c = \int_{V_c} \rho(\vec{r}\times\vec{g}) dV + \int_{S_c} (\vec{r}\times\vec{\sigma}_s) dS. \tag{4.109}$$

Για την διατήρηση της ενέργειας έχουμε

$$\int_{V_c} \frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} dV + \int_{S_c} (\rho\varepsilon)\vec{u}\cdot\hat{n} dS = \frac{dQ}{dt} + \int_{S_c} \vec{\sigma}_s\cdot\vec{u} dS, \tag{4.110}$$

όπου στό έργο που γίνεται από τις επιφανειακές δυνάμεις βάλαμε την ταχύτητα ροής και όχι την επιλεγμένη ταχύτητα για τον όγκο ελέγχου, που θα μπορούσε να είναι και μηδέν.

Μία τελευταία σχέση είναι η αντίστοιχη του δεύτερου θερμοδυναμικού αξιώματος που για ένα υλικό όγκο έχει την μορφή

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} (\rho s) dV \geq -\int_{S_m(t)} \frac{\vec{q}\cdot\hat{n} dS}{T}, \tag{4.111}$$

όπου $\vec{q}$ είναι το διάνυσμα ροής θερμότητας, δηλ. θερμότητα ανά μονάδα επιφάνειας ανά μονάδα χρόνου. Το δεύτερο αξίωμα μας λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής της εντροπίας στον υλικό όγκο είναι μεγαλύτερη η ίση με τον ρυθμό ροής μέσω της επιφάνειας αφου διαιρέσουμε με την τοπική θερμοκρασία σε κάθε σημείο της επιφάνειας. Το αξίωμα εκφρασμένο σε όγκο ελέγχου έχει την μορφή

$$\int_{V_c} \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} dV + \int_{S_c} (\rho s)\vec{u}\cdot\hat{n} dS \geq -\int_{S_c} \frac{\vec{q}\cdot\hat{n} dS}{T},, \tag{4.112}$$

Το δεύτερο αξίωμα δεν βοηθά στην λύση της δυναμικής της ροής αλλά βάζει σημαντικούς περιορισμούς στις πιθανές λύσεις ενός προβλήματος.

Στην μακροσκοπική μελέτη των νόμων διατήρησης δεν περιοριστήκαμε σε ανιξωδική ροή ούτε σε ισεντροπική ροή. Αλλά δώσαμε τις γενικές σχέσεις που θα ισχύουν και για ιξωδική ροή. Στην περίπτωση αυτή αρκεί να γνωρίζουμε τις αντίστοιχες ανά μονάδα επιφάνειας, δηλ. $\vec{\sigma}_s$. Για ισεντροπική ροή χωρίς διάδοση θερμότητας και ιξώδες, η εξίσωση ενέργειας απλοποιείται, ενώ το δεύτερο θερμοδυναμικό αξίωμα ισχύει με ισότητα, και αν θεωρήσουμε ότι οι συνθήκες αυτές ικανοποιούνται προσεγγιστικά τότε μπορούμε να χρησιμοποιούμε την εξίσωση *Bernoulli*. Μάλιστα εφόσον έχουμε λύσει την εξίσωση διατήρησης ορμής για ιξωδική ροή, η χρήση της εξίσωσης *Bernoulli* την ενέργεια μπορεί να μας πει αν η ροή είναι ελάχιστα ιξωδική η όχι.

4.11 Διατήρηση ορμής σε μη αδρανειακά συστήματα

Για ένα σωματίδιο σε ένα αδρανειακό σύστημα η εξίσωση διατήρησης της ορμής ανά μονάδα μάζας μας λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής (επιτάχυνση) ισούται με το σύνολο των πραγματικών δυνάμεων που ασκούνται στο ρευστό σωματίδιο. Π.χ. για ροή ρευστού στην Γή οι πραγματικές δυνάμεις είναι η βαρύτητα και η βαθμίδα πίεσης, αν θεωρήσουμε ανιξώδη ροή. Η επιτάχυνση όμως αναφέρεται σε ένα αδρανειακό σύστημα. Στην Γή όμως μπορούμε να μετρήσουμε το πεδίο ροής και επομένως την αντίστοιχη επιτάχυνση σε σχέση με το περιστρεφόμενο (μη αδρανειακό) σύστημα της Γής. Προηγουμένως είδαμε πως συνδέονται οι επιταχύνσεις στα δύο συστήματα. Εάν τώρα θέλουμε να γράψουμε την εξίσωση για την επιτάχυνση στο μη αδρανειακό σύστημα, τότε πρέπει να πάρω υπόψη μαζύ με τις πραγματικές και τις ψευδοδυνάμεις[20] που στην προκειμένη περίπτωση είναι η δύναμη *Coriolis* και η φυγόκεντρος. Εχουμε λοιπόν

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}P - \rho g\vec{\nabla}h - \rho\left[2\vec{\Omega}\times\vec{u} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})\right] \tag{4.113}$$

Όλες οι ποσότητες στην εξίσωση αναφέρονται σε ένα σύστημα αναφοράς που περιστρέφεται με τη Γη, και $\vec{\Omega}$ είναι το διάνυσμα γωνιακής ταχύτητας γύρω από τον άξονα περιστροφής.

4.11.1 Φυγόκεντρος δύναμη

Ας εξετάσουμε πρώτα την φυγόκεντρο δύναμη ανά μονάδα μάζας $-\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})$. Από τον ορισμό της είναι κάθετη στον άξονα περιστροφής και στο επίπεδο των διανυσμάτων $\vec{\Omega}$ και $\vec{r}$. Επομένως είναι στην κατεύθυνση της κάθετης συνιστώσας του $\vec{r}$ στον άξονα περιστροφής. Αυτό φαίνεται εύκολα αν βάλουμε[21] $\vec{r} = \vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp}$ στην φυγόκεντρο δύναμη, και έχουμε

$$-\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}) = \Omega^2\vec{r}_{\perp},$$

όπου $\vec{r}_{\perp}$ είναι η κάθετη συνιστώσα του $\vec{r}$ στον άξονα περιστροφής. Η φορά της δύναμης μακριά από τον άξονα περιστροφής δίνει το όνομα της ψευδοδύναμης.

[20] Επειδή συχνά αναγκαζόμαστε να δουλεύουμε σε μη αδρανειακά σύστηματα, παραλείπουμε να ξεκαθαρίσουμε ότι είναι ψευδοδυνάμεις, όπως συχνά γίνεται στην βιβλιογραφία. Στη συνέχεια και εμείς θα υποκύψουμε στον πειρασμό να παραλείπουμε τον χαρακτηρισμό ψευδο- μπροστά από το δύναμη.

[21] Η ισοδύναμα αν χρησιμοποιήσουμε την διανυσματική σχέση

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

.

Η τελευταία μορφή της είναι βολική ώστε να εκφραστεί σαν βαθμίδα. Εχουμε[22]

$$\Omega^2 \vec{r}_\perp = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\Omega^2 r_\perp^2) = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(|\vec{\Omega}\times\vec{r}|^2)$$

για την φυγόκεντρο δύναμη. Αυτό μας δίνει την δυνατότητα να περιλάβουμε τον όρο της φυγοκέντρο σε μία ενεργό βαρύτητα, δηλ. έχουμε

$$\vec{g}_e = -\vec{\nabla}\left(U - \frac{1}{2}|\vec{\Omega}\times\vec{r}|^2\right)$$

Για σφαιρική Γή ο όρος της βαρύτητας έχει μόνο ακτινική συνιστώσα, ενώ η φυγόκεντρος εξαρτάται από το το γεωγραφικό πλάτος (η το συμπλήρωμά της) και έχει συνιστώσα και στην $\hat{e}_\theta$ κατεύθυνση. Μία εκτίμηση της σύγκρισης των δύο όρων είναι χρήσιμη. Η μέγιστη τιμή στην επιφάνεια της γής είναι στον Ισημερινό και δίνεται από την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γής $\Omega = 7.29\times 10^{-5}\ sec^{-1}$ και την ακτίνα της Γής $R = 2000m$ και είναι ίση με $10^{-6}g$. Παρόλο που ο λόγος είναι μικρός είναι καθοριστικός στο σχήμα των περιστρεφομένων σωμάτων όπως είναι η Γη. Τα σώματα αυτά δεν έχουν σφαιρικό σχήμα αλλά προλατε ελλειψοειδές με διόγκωση στον ισημερινό όπου η φυγόκεντρος έχει την μέγιστη τιμή και είναι σε αντίθετη κατεύθυνση με την βαρύτητα. Να σημειώσουμε ότι και η γή είναι ένα ρευστό σε γεωλογικούς χρόνους. Επίσης ένα βαρύδιο στην επιφάνεια της γης δεν κατευθύνεται στο κέντρο της γής αλλά στην συνισταμένη $\vec{g}_e$.

4.11.2 *Coriolis* Δύναμη.

Η δύναμη *Coriolis* εξαρτάται από την ταχύτητα ροής και μόνο το πρόσημό της εξαρτάται από την θεση του σωματιδίου. Εμεσα υπάρχει και εξάρτηση από την θέση, διότι αν αναφερόμαστε στη ροή ανέμων αυτή είναι συνήθως είναι εφαπτομένη σε κάθε σημείο. Στό Σχ. 4.13 δείχνουμε την αλλαγή προσήμου της δύναμης στο βόρειο και νότιο ημισφαίριο. Π.χ. ροή με ταχύτητα προς βορρά θα αποκλίνει προς τα δεξιά (αριστερά) αν είμαστε στο βόρειο (νότιο) ημισφαίριο. Το αντίθετο συμβαίνει αν η ροή είναι προς τον νότο. Δεν υπάρχει όμως διαφορά μεταξύ βορείου και νοτίου ημισφαιρίου όταν η ροή είναι προς δυτικά με απόκλιση βόρεια η προς ανατολάς με απόκλιση νότια και στα δύο ημισφαίρια. Στην περίπτωση που η ταχύτητα ροής έχει και ακτινική συνιστώσα τότε η εικόνα γίνεται πιο πολύπλοκη αλλά μπορούμε να αναφερθούμε στον ορισμό σε κάθε σημείο για να δούμε την κατεύθυνση της δύναμης *Coriolis* και επομένως την απόκλιση της ροής.

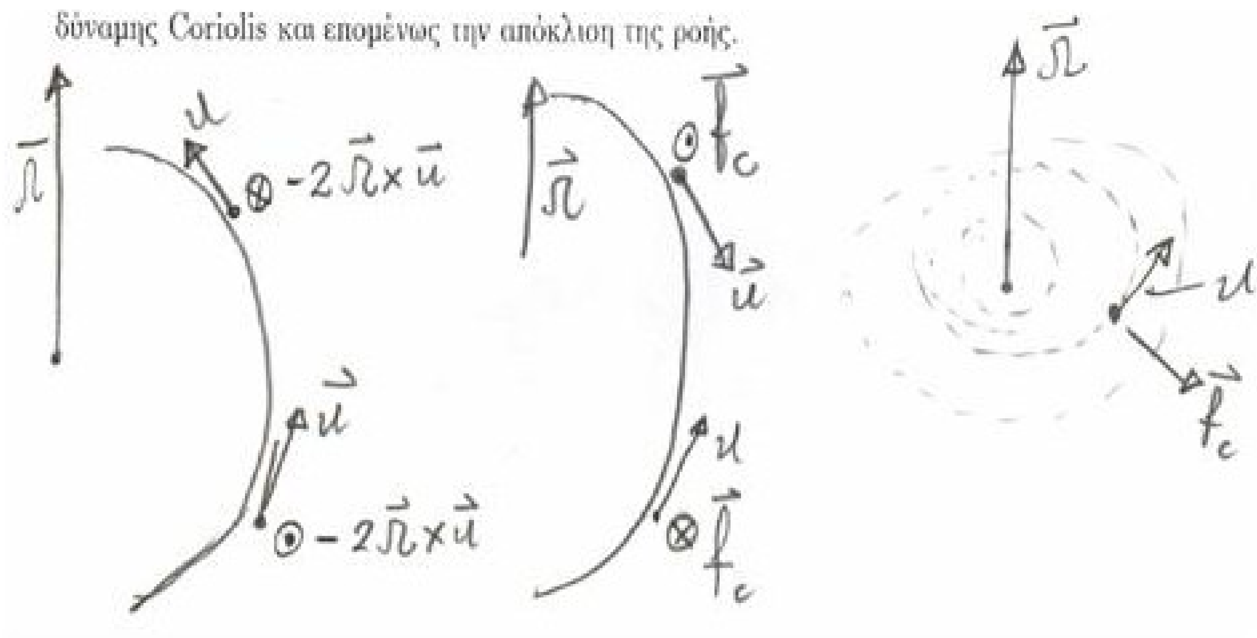
Ας δούμε την επίδραση της δύναμης *Coriolis* σε ένα απλό παράδειγμα ακτινικής ροής. Στο Σχ 4.14 δείχουμε την ακτινική ροή, όπως φαίνεται από πάνω, σε ένα δεξιόστροφο περιστρεφόμενο σύστημα. Η δύναμη *Coriolis* σε κάθε σημείο είναι κάθετη στην ταχύτητα, δίνει μία περιστροφή στα σωματίδια ρευστού, αντίθετη με την φορα περιστροφής του συστήματος. Στην περίπτωση του Σχ. 4.14 η απόκλιση του ρευστού είναι στην φορά των δεικτών ρολογιού ενώ η περιστροφή του συστήματος είναι αντίθετα. Μια τέτοια ροή ονομάζεται ***αντικυκλώνας***, ενώ αν η απόκλιση ροής είναι στην ίδια φορά τότε έχουμε ένα ***κυκλώνα***

Εχοντας δεί τα χαρακτηριστικά της δύναμης *Coriolis* αξίζει να διερωτηθούμε αν είναι σημαντική η επίδρασή της. Για να το δούμε αυτό αρκεί να συγκρίνουμε τους όρους της επιτάχυνσης στο περιστρεφόμενο συστημα με τον όρο *Coriolis*. Αυτό γίνεται με τον λόγο τους που είναι ο αριθμός

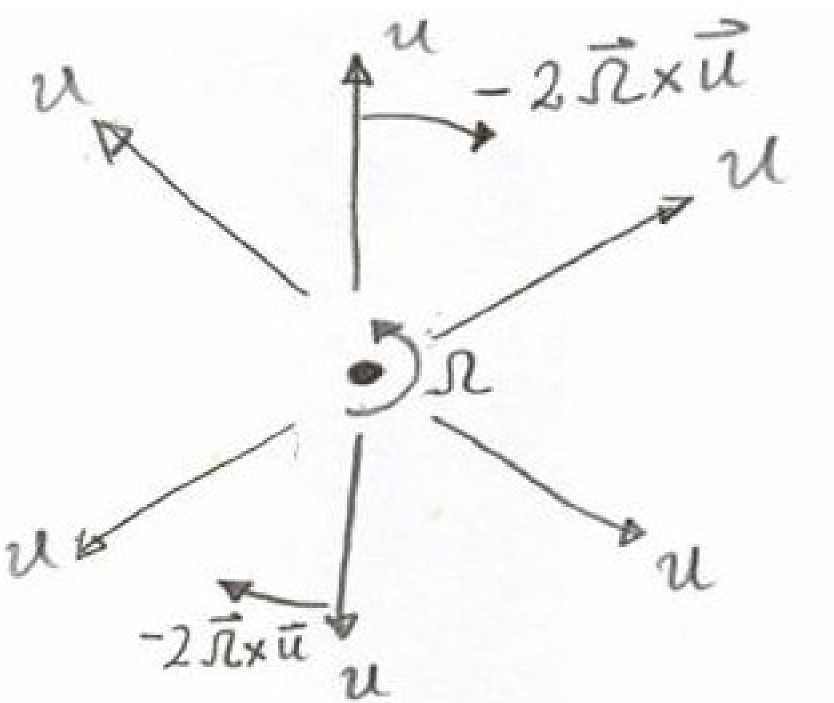
$$\text{αριθμός} \quad Rossby \;\; Ro = \frac{U}{2\Omega L} \tag{4.114}$$

[22] Εύκολα βγαίνει ότι

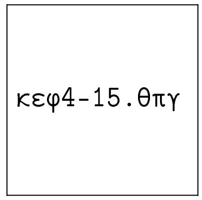
$$\frac{1}{2}\vec{\nabla}(r_\perp^2) = \vec{r}_\perp$$



Σχήμα 4.13: Σχ. 4.13 Η επίδραση της δύναμης *Coriolis* (α) στο βόρειο ημισφαίριο, (β) στο νότιο ημισφαίριο και (γ) για ανατολική η δυτική ροή.



Σχήμα 4.14: Σχ. 4.14 Η επίδραση της δύναμης *Coriolis* σε ακτινική ροή.



Σχήμα 4.15: Σχ. 4.15 Τοπικό σύστημα αναφοράς για τις εξισώσεις διατήρησης ορμής με την δύναμη *Coriolis*. .

όπου Ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής, και U, L χαρακτηριστικές κλίμακες ταχύτητας και μήκους[23]. Η δύναμη *Coriolis* είναι σημαντική όταν ο αριθμός *Rossby* είναι μικρός. Αυτό δεν συμβαίνει μόνο για μεγάλη γωνιακή ταχύτητα αλλά και μικρή ταχύτητα ροής η μεγάλα μήκη. Για παράδειγμα σε μία χαρακτηριστική ροή ανέμων έχουμε μήκη $L = 1000km$, ταχύτητες ροής $U = 20m/sec$ με $\Omega \approx 10^{-4}sec^{-1}$. Αυτά μας δίνουν $Ro \approx 0.1$ που δεν είναι ιδιαίτερα μικρό.

Για ένα σωματίδιο ρευστού με ταχύτητα $\vec{u} = (u, v, w)$ όπου έχουμε δεξιόστροφο σύστημα με το διάνυσμα Ω κατά μήκος του $z-$άξονα η δύναμη *Coriolis* έχει συνιστώσες

$$\vec{f}_{cor} = -\vec{\Omega} \times \vec{u} = \Omega v\hat{\imath} - \Omega u\hat{\jmath}$$

. Συχνά όμως το σύστημα αναφορά είναι τοπικο με τον $z-$άχονα κάθετο στην επιφάνεια της Γης, όπως στο Σχ. 4.15 όπου ο $y-$άξονας είναι εφαπτόμενος της επιφάνειας προς τα βόρεια και ο $x-$άξονας είναι κάθετος μέσα στο χαρτι. Στο νέο σύστημα η γωνιακή ταχύτητα έχει συνιστώσες $\vec{\Omega} = (0, \Omega\cos\delta, \Omega\sin\delta)$, όπου δ είναι το γεωγραφικό πλάτος. Οι συνιστώσες της δύναμης *Coriolis*

$$\vec{f}_{cor} = -2\vec{\Omega} \times \vec{u} = -2\begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 0 & \Omega\cos\delta & \Omega\sin\delta \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \tag{4.115}$$

$$-2(\Omega u_z\cos\delta - \Omega u_y\sin\delta)\hat{e}_x - 2\Omega u_x\sin\delta\hat{e}_y + 2\Omega u_x\cos\delta\hat{e}_z \tag{4.116}$$

Συχνά κάνουμε την επιπλέον προσέγγιση ότι μηδενίζεται η u_z-συνιστώσα της ταχύτητας (στην διεύθυνση της τοπικής καθέτου) και η δύναμη *Coriolis* απλοποιείται ως

$$\vec{f}_{cor} = fu_y\hat{e}_x - fu_x\hat{e}_y + fu_x\cot\delta\hat{e}_z$$

όπου εισάγαμε την *Coriolis παράμετρο*

$$f = 2\Omega\sin\delta.$$

Στην περίπτωση αυτή ο όρος της επιτάχυνσης στο περιστρεφόμενο σύστημα δεν έχει $z-$συνιστώσα και η $z-$συνιστώσα της *Coriolis* δύναμης αντισταθμίζεται από την βαθμίδα πίεσης η άλλες δυνάμεις.

4.11.3 Εξίσωση *Bernoulli* σε περιστρεφόμενο σύστημα.

Στο ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς η εξίσωση διατήρησης της ορμής για μόνιμη ροή μας δίνει

$$\vec{\nabla}(\frac{1}{2}u^2) - \vec{u} \times \vec{\zeta} = -\vec{\nabla}U - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \vec{f}_{\phi\upsilon\gamma} + \vec{f}_{cor}, \tag{4.117}$$

[23]Για την ακρίβεια οι δύο κλίμακες μπαίνουν λόγω της βαθμίδας της ταχύτητας από το ορο επιτάχυνσης λόγω μεταφοράς. Η ταχύτητα επιπλέον υπάρχει και στους δύο όρους και αναιρούνται στο λόγο.

όπου $\vec{\zeta}$ είναι ο στροβιλισμός του πεδίου ταχύτητας στο περιστρεφόμενο σύστημα, U δυναμική ενέργεια ανά μονάδα μάζας για ένα διατηρητικό πεδίο, $\vec{f}_{\varphi\upsilon\gamma}$ και $\vec{f}_{cor}$ η φυγόκεντρος και η δύναμη $Coriolis$ αντίστοιχα. Είδαμε ότι την φυγόκεντρο δύναμη μπορούμε να την περιλάβουμε σε ένα ενεργό δυναμικό και μπορεί να εκφραστεί σαν

$$\vec{f}_{\varphi\upsilon\gamma} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}|\vec{\Omega}\times\vec{r}|^2\right)$$

Ετσι πάλι μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $\mathcal{B}(\vec{r})$ ώστε

$$\vec{\nabla}\mathcal{B} \equiv \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}u^2 + U + \frac{1}{2}|\vec{\Omega}\times\vec{r}|^2 - \frac{1}{\rho}P\right) = \vec{u}\times\vec{\zeta} + 2\vec{u}\times\vec{\Omega}. \tag{4.118}$$

Στο δεξιό μέρος μπορεί να θεωρήσουμε ότι ο όρος $\vec{\zeta}+2\vec{\Omega}$ είναι ο τοπικός στροβιλισμός σε σχέση με το ακίνητο σύστημα. Αν δε συμβεί να μηδενίζεται τότε μηδενίζεται και το δεξιό μέρος της (4.118). Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι η ποσότητα

$$\mathcal{B}(\vec{r}) \equiv \left(\frac{1}{2}u^2 + U + \frac{1}{2}|\vec{\Omega}\times\vec{r}|^2 - \frac{1}{\rho}P\right) \tag{4.119}$$

$$= \text{ σταθερά σε όλο το χώρο αν } \quad, \vec{\zeta} + 2\vec{\Omega} = 0. \tag{4.120}$$

Σε αντίθετη περίπτωση μπορούμε να υπολογίσουμε την μεταβολή του για τυχαία δυνατή μετατόπιση[24] $d\vec{r}$. Εχουμε για την μεταβολή της ποσότητας $\mathcal{B}$,

$$d\mathcal{B} = \vec{\nabla}\mathcal{B}\cdot d\vec{r} = d\vec{r}\cdot\left[\vec{u}\times\left(\vec{\zeta}+2\vec{\Omega}\right)\right].$$

Η μεταβολή ισούται με το έργο του τοπικού στροβιλισμού κατά την δυνατή μετατόπιση, το οποίο εν γένει εξαρτάται από την μετατόπιση. Εάν η δυνατή μετατόιπιση είναι και πραγματική μετατόπιση κατά μήκος της γραμμής ροής, τότε $d\vec{r} = \vec{u}dt$ και το αντίστοιχο έργο μηδενίζεται. Ετσι η ποσότητα $\mathcal{B}$ είναι σταθερά κατά μήκος της γραμμής ροής. Για μόνιμη ροή το ρευστό σωματίδιο διατηρεί την ενέργειά του αν σ' αυτή περιλάβουμε και το έργο της φυγοκέντρου στο ενεργό δυναμικό. Δηλ. η δύναμη $Coriolis$ δεν παράγει έργο κατά την κίνηση του σωματιδίου, και αυτό είναι αναμενόμενο διότι είναι κάθετη στην πραγματική μετατόπιση. Αυτό μπορεί να εκφραστεί με την υλική παράγωγο της $\frac{D}{Dt}\mathcal{B}(\vec{r},t)$ περιλαμβάνοντας και την περίπτωση που η ροή δεν είναι μόνιμη. Πρέπει να θεωρήσουμε την μεταβολή της $\mathcal{B}$ για ένα σωματίδιο ρευστού καθώς κινείται. Η ανάλυση αυτή θα γίνει στο Κεφ. 6, όταν θα περιλάβουμε και τις ιξωδικές δυνάμεις.

4.11.4 Γεωστροφική ροή.

Η διανυσματική μορφή της δύναμης $Coriolis$ (σαν εξωτερικό γινόμενο περιστροφικών και μεταφορικών διανυσμάτων) είναι αρκετά πολύπλοκη ώστε να επιδέχεται εύκολη ερμηνεία των επιδράσεων της. Ελπίζουμε όμως ότι μερικές από τις προσεγγίσεις που θα κάνουμε στη συνέχεια θα μας βοηθήσουν να αποκτήσουμε φυσική διαίσθηση και κατανόηση μερικών βασικών φαινομένων που συμβαίνουν στην ατμόσφαιρα και στους ωκεανούς. Ενα τέτοιο παράδειγμα είναι η ανιξώδης ροή με μηδενικό αριθμό $Rossby$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να παραλείψουμε τον όρο της επιτάχυνσης $\frac{D\vec{u}}{Dt}$. Η ροή αυτή ονομάζεται *γεωστροφική*, και συμβαίνει στην ατμόσφαιρα για ροές μικρής κλίμακας.

[24] Δυνατή μετατόπιση σημαίνει ότι είναι μετατόπιση που δεν αντιστοιχεί απαραίτητα σε πραγματική μετατόπιση σύμφωνα με τις συνισταμένες δυνάμεις. Απλώς είναι το διάνυσμα που συνδέει δύο σημεία στο χώρο χωρίς να γίνεται αναφορά σε χρονική εξέλιξη.

Στην περίπτωση αυτή η δύναμη $Coriolis$ αντισταθμίζεται από την βαθμίδα πίεσης αλλά όπως θα δούμε η ροή αυτή μας επιφυλάσσει εκπλήξεις που αντιτίθενται στη μέχρι τώρα λογική που αναπτύξαμε. Εχουμε λοιπόν ότι

$$2\rho\vec{\Omega} \times \vec{u} = -\vec{\nabla}P$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η βαθμίδα της πίεσης είναι κάθετη στην ταχύτητα ροής[25]. Αυτό σημαίνει ότι η ροή γίνεται κατά μήκος γραμμών σταθερής πίεσης αν θεωρήσουμε ότι η ροή είναι διδιάστατη και παράλληλη προς το έδαφος. Αυτός είναι και ο λόγος που συχνά και οι χάρτες καιρικών συνθήκων σχεδιάζονται με ισοβαρικές (σταθερής πίεσης) γραμμές. Στο Σχ 4.15α δείχνουμε την διανυσματική σχέση ανάμεσα στην βαθμίδα πίεσης και τα διανύσματα περιστροφής και ταχύτητας που μας δίνουν την δύναμη $Coriolis$. Ας θεωρήσουμε ότι στο επίπεδο έχουμε ένα κέντρο υψηλής πίεσης όπου η πίεση ελαττώνεται καθώς απομακρυνόμαστε ακτινικά, ώστε οι γραμμές σταθερής πίεσης είναι κύκλοι. Στην περίπτωση αυτή το διάνυσμα $-\vec{\nabla}P$ είναι ακτινικά προς τα έξω. Η αντισταθμιστική δύναμη $Coriolis$ είναι ακριβώς αντίθετη και για την περιστροφή του σχήματος η ροή, δηλ η ταχύτητα, έχει την φορά του σχήματος και είναι εφαπτόμενη των ισοβαρικών γραμμών. Ετσι γνωρίζοντας την βαθμίδα πίεσης γνωρίζουμε και την φορά ροής. Ο κανόνας αυτός είναι συνεπής και με την κατεύθυνση της δύναμης $Coriolis$ που είδαμε για το βόρειο ημισφαίριο. Ετσι ενώ η βαθμίδα πίεσης θα έτεινε να κινήσει το ρευστό ακτινικά προς τα έξω η δύναμη $Coriolis$ του δείνει απόκλιση προς τα δεξιά στο βόρειο ημισφαίριο.

Σε δύο διαστάσεις με περιστροφή γύρω από κάθετο άξονα έχουμε για τις δύο συνιστώσες της ταχύτητας

$$u_y = \frac{1}{\rho f}\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$u_x = -\frac{1}{\rho f}\frac{\partial P}{\partial y}$$

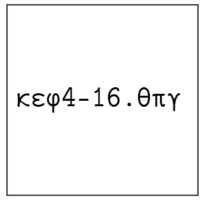
που μας οδηγούν στον ορισμό της συνάρτησης ροής

$$\Psi(x, y) = -\frac{P}{\rho f}$$

που επιβεβαιώνει ότι οι ισοβαρικές είναι και ροικές γραμμές. Στις παραπάνω σχέσεις δεν υποθέσαμε ότι το ρευστό είναι ασυμπίεστο εκτός από την σχέση για την συνάρτηση ροής όπου υποθέσαμε σταθερή πυκνότητα. Αυτό είναι σύμφωνο με τον προηγούμενο ορισμό της συνάρτησης ροής.

Ενα άλλο ενδιαφέρον φαινόμενο που εύκολα παρατηρείται στο εργαστήριο είναι η στήλη $Taylor$. Γι' αυτό απαιτείται ένα περιστρεφόμενο δοχείο με ροή που εμποδίζεται από μία ημισφαιρική προεξοχή στο δάπεδο που είναι αρκετά έξω από το οριακό στρώμα ώστε να μην έχουμε σημαντική επίδραση των ιξωδικών δυνάμεων. Υπο συνθήκες μη περιστροφής θα περιμέναμε η ροή να γίνει με συμπίεση των γραμμών ροής πάνω και πλάγια από το εμπόδιο. Εάν όμως η περιστροφή είναι πολύ γρήγορη αυτό που παρατηρούμε είναι ότι οι γραμμές ροής κάμπτονται γύρω από το εμπόδιο και όχι από πάνω (δες Σχ.4.16). Η δύναμη $Coriolis$ στο πείραμα αυτό είναι πάνω στο επίπεδο ενώ έχουμε πολύ μικρή εξάρτηση απο την $z-$κατεύθυνση.

[25]Να υπενθυμήσουμε ότι παντα αναφερόμαστε στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς, ενώ στο αδρανειακό σύστημα η βαθμίδα πίεσης ισούται με την επιτάχυνση στο αδρανειακό σύστημα, η οποία δεν είναι αμελητέα καθώς περιλαμβάνει και την επιτάχυνση $Coriolis$.



Σχήμα 4.16: Σχ. 4.16 Γραμμές ροής στην στήλη *Taylor*. .

4.11.5 Ροή βαθμίδας.

Ας θεωρήσουμε πάλι την ροή σε δύο διαστάσεις με περιστροφή γύρω από τον κάθετο άξονα, παίρνοντας όμως υπόψη και την περίπτωση που η αδράνεια δεν είναι αμελητέα. Ετσι για την διατήρηση ορμής σε συνιστώσες έχουμε

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}$$

Στην περίπτωση κυλινδρικής συμμετρίας είναι πιο χρήσιμο να εκφραστούν σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Εχουμε λοιπόν

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi^2}{r} - f u_\phi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}$$

$$u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + f u_r = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \phi}$$

που πρέπει να λυθούν μαζύ με την εξίσωση συνέχειας για ασυμπίεστο ρευστό,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = 0$$

Οι παραπάνω εξισώσεις λύνονται εύκολα ροή με $u_r = 0$, $u_\phi = u_\phi(r)$ και $P = P(r)$, δηλ. έχουμε μόνο εφαπτομενική ροή με εξάρτηση μόνο από το κέντρο. Από την ακτινική εξίσωση διατήρησης ορμής έχουμε

$$u_\phi = -\frac{rf}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{rf}{2}\right)^2 + \frac{r}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}}$$

όπου για δεδομένη ακτινική βαθμίδα της πίεσης έχουμε ροή. Η βαθμίδα πίεσης μπορεί να είναι θετική η αρνητική. Στην περίπτωση αρνητικής βαθμίδας πρέπει να ικανοποιεί

$$\left|\frac{\partial P}{\partial r}\right| \frac{\rho r f^2}{4}$$

Η φορά της u_ϕ μπορεί να είναι σύμφωνη η αντίθετη με τους δείκτες του ρολογιού ανάλογα με το πρόσημο της τετραγωνικής ρίζας[26]. Στο βόρειο ημισφαίριο ($f > 0$) $u_\phi < 0 \left|\frac{\partial P}{\partial r}\right| < 0$ ενώ έχει το αντίθετο πρόσημο στο νότιο ημισφαίριο. Στην περίπτωση αρνητικής βαθμίδας ο προηγούμενος περιορισμός στην απόλυτη τιμή του βαζει και περιορισμό στο μέτρο της εφαπτομενικής ροής.

[26]Για να δούμε αν και οι δύο ταχύτητες είναι δυναμικά μόνιμες πρέπει να καταφύγουμε στην ανάλυση σταθερότητας. Συνήθως η μία είναι ασταθής.

Αντίθετα για θετική βαθμίδα μπορούμε να έχουμε υψηλές ταχύτητες όπως παρουσιάζονται στους ανεμοστροβίλους.

Υπάρχει και η ειδική περίπτωση μηδενικής βαθμίδας πίεσης $\frac{\partial P}{\partial r} = 0$ και έχουμε το *ρεύμα αδράνειας* με $u_\phi = -fr$, δηλ. περιστροφή με σταθερή γωνιακή ταχύτητα f που μεταβάλεται με το γεωγραφικό πλάτος και αντίστοιχη περίοδο

$$T = \frac{2\pi}{f}$$

που μεταβάλλεται από περίπου 12 ώρες στους πόλους σε απειρο στον ισημερινό.