Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 3

Κινητική και επιτάχυνση ¨σωματιδίου’

3.1 Εισαγωγή

Στα προηγούμενα εισάγαμε την έννοια του συνεχούς μέσου και του πεδίου ταχύτητας για την περιγραφή της ροής ενός ρευστού. Παρόλο που αντικαταστήσαμε τα άτομα του ρευστού με τη μέση πυκνότητα, εν τούτοις η έννοια του ¨ρευστού σωματιδίου’ είναι απαραίτητη για να γράψουμε το αντίστοιχο της εξίσωσης του Νεύτωνα, η οποία έχει διατυπωθεί με την περιγραφή *Lagrange*. Αν και είναι δύσκολο να δώσουμε έναν ορισμό για το σωματίδιο, θα μπορούσαμε να το θεωρήσουμε σαν την ποσότητα του ρευστού που περιέχεται στον οριακό όγκο ΔV_0 για τον ορισμό της μέσης πυκνότητας (δες Κεφ. 2.1). Παρακολουθώντας την κίνηση αυτού του ιδεατού σωματιδίου, μπορούμε να δώσουμε ποσοτικά την κινητική της ροής και ειδικότερα να υπολογίσουμε την επιτάχυνση του. Για να διευκολύνουμε το έργο μας σ′ αυτό το στάδιο, θα θεωρήσουμε ρευστά με πολύ απλές ιδιότητες, έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσουμε τα μαθηματικά. Το ιδανικό υγρό *Euler* εξ ορισμού έχει μηδενικό ιξώδες και μηδενική συμπιεστότητα. Ένα υγρό χωρίς ιξώδες δε μπορεί να συντηρήσει διατμητική τάση και η πίεση P είναι ισοτροπική σε όλα τα σημεία. Σε ένα ασυμπίεστο υγρό η πυκνότητα ρ δεν εξαρτάται από την τιμή της πίεσης. Αυτό δε σημαίνει ότι δεν επιτρέπεται να έχουμε μεταβολές της πυκνότητας λόγω θερμοκρασίας. Αυτή όμως έχει αμελητέα επίδραση στη ροή του υγρού, εκτός αν είναι ικανή να δημιουργήσει ρεύματα μεταφοράς (δες Κεφ. 12).

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε, χρησιμοποιόντας τους βασικούς νόμους τις μηχανικής, να αναπτύξουμε μία μορφή τους η οποία θα είναι κατάλληλη για τη μελέτη των υγρών. Οι νόμοι αυτοί είναι η διατήρηση της μάζας που θα εκφραστεί από την εξίσωση συνέχειας, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα που θα εκφραστεί με το θεώρημα της ορμής και η διατήρηση της ενέργειας (ή το αντίστοιχο πρώτο θερμοδυναμικό αξίωμα) με την εξίσωση ενέργειας. Εκτός από αυτούς τους νόμους διατήρησης, απαιτούνται επιπλέον ορισμένες καταστατικές σχέσεις που χαρακτηρίζουν το υγρό. Στην περίπτωση του ιδανικού υγρού αυτές δεν είναι απαραίτητες, διότι έχουμε μηδέν ιξώδες και συμπιεστότητα. Η έννοια του ιδανικού υγρού είναι χρήσιμη και όταν το ιξώδες είναι χαμηλό, ώστε οι δυνάμεις τριβής να είναι αμελητέες σε σύγκριση με τις εξωτερικές δυνάμεις, ενώ η μεταβολή στην ορμή μιας μάζας υγρού λόγω του ιξώδους είναι μικρή σε σχέση με την ολική ορμή του ρέοντος υγρού. Είναι επίσης καλή προσέγγιση, αν ενδιαφερόμαστε για το κύριο μέρος της ροής και όχι για τις περιοχές του υγρού που είναι σε επαφή με τα τοιχώματα. Όπως θα δούμε αργότερα, σε πραγματικά υγρά σε επαφή με επιφάνειες δημιουργείται ένα *οριακό στρώμα* ροής, όπου η συμπεριφορά είναι πολύ διαφορετική από αυτή που θα δούμε σ′ αυτό το κεφάλαιο.

Η εφαρμογή της εξίσωσης Νεύτωνος στη διατήρηση της ορμής ενός ρευστού σωματιδίου απαιτεί μία διαφορική μορφή. Ταυτόχρονα όμως, για πρακτικές εφαρμογές έχουμε να κάνουμε με μεγάλες ποσότητες ρευστού και μακροσκοπικές μετρήσεις. Στην περίπτωση αυτή χρειαζόμαστε τις αντίστοιχες εξισώσεις σε ολοκληρωτική μορφή. Αυτό είναι χρήσιμο γιατί και οι πειραματικές μετρήσεις γίνονται με μακροσκοπικές ποσότητες, όπως είναι ο ρυθμός ροής όγκου Q σε ένα σωλήνα ή η ολική δύναμη που ασκείται στα τοιχώματα ενός αγωγού. Εδώ θα δώσουμε έμφαση στη διαφορική μορφή, αλλά θα δούμε και τις μακροσκοπικές εξισώσεις. Σε κάθε περίπτωση πρέπει να είμαστε προσεκτικοί για το ποιός είναι ο όγκος του ρευστού και θα χρειαστεί να ξεκαθαρίσουμε εάν τα όρια του σωματιδίου είναι σταθερά ή μεταβάλλονται με το χρόνο. Π.χ. αν αναφερόμαστε σε μακροσκοπικές ποσότητες και χρησιμοποιήσουμε την ολοκληρωτική μορφή των εξισώσεων διατήρησης, τότε ο όγκος ελέγχου είναι στην επιλογή μας. Επίσης αν οι υδροδυναμικές ποσότητες π.χ. ταχύτητα, πίεση κ.τ.λ. δε μεταβάλλονται αισθητά (αυτό μπορεί να εκτιμηθεί ποσοτικά) σε κάποιο όγκο V_0, τότε αυτός ο όγκος είναι ο όγκος που μπορούμε να επιλέξουμε για να παρακολουθήσουμε τη χρονική του εξέλιξη.

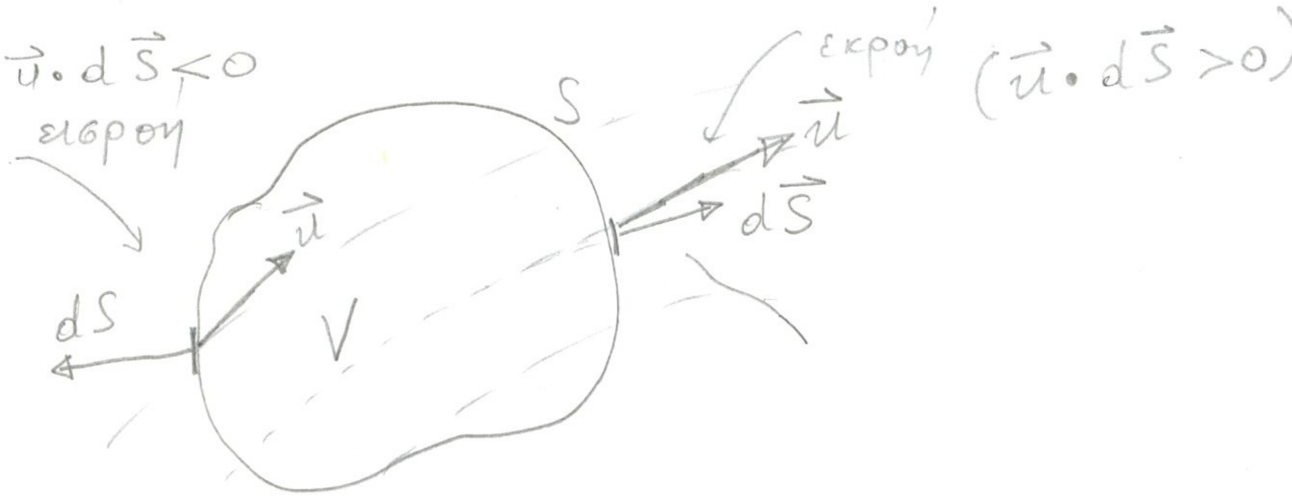
Στο παρόν κεφάλαιο θα δώσουμε την επιτάχυνση ενός ρευστού σωματιδίου, όταν το πεδίο ταχύτητας είναι γνωστό. Πρίν από αυτό, θα διατυπώσουμε την αρχή διατήρησης της μάζας, διότι είναι κρίσιμη για τον ορισμό του σωματιδίου. Η διαφορική μορφή της θα μας δώσει επίσης μια πολύ απλή σχέση για ασυμπίεστα ρευστά, που βάζει σημαντικούς περιορισμούς στο πεδίο ταχύτητας, λόγω μηδενισμού της απόκλισης του πεδίου. Τελικά θα διερευνήσουμε και το φυσικό νόημα του στροβιλισμού του πεδίου ταχύτητας.

3.2 Εξίσωση συνέχειας και διατήρηση μάζας

Θεωρούμε ένα τυχαίο (αλλά σταθερό στο χώρο) όγκο V, εξ ολοκλήρου στο υγρό, που περικλείεται από τη νοητή επιφάνεια S. Η μάζα του υγρού που βρίσκεται στον όγκο V (του οποίου τα όρια είναι σταθερά στο χώρο και ορίζονται απο την επιφάνεια S) είναι το ολοκλήρωμα της ρd^3r όπου $d^3r \equiv dV$ είναι ένα στοιχείο όγκου. Το υγρό διαφεύγει και εισέρχεται μέσω της επιφάνειας S και ο ρυθμός με τον οποίο η μάζα στον όγκο V μεταβάλλεται είναι ίσος με το συνολικό ρυθμό ροής μάζας δια μέσω της περιβάλλουσας επιφάνειας S, καθόσον δεν υπάρχουν εσωτερικές πηγές μάζας[1]. Θα δούμε πως αυτή η μακροσκοπική αρχή διατήρησης της μάζας εκφράζεται τοπικά σε κάθε σημείο του χώρου. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να μετατρέψουμε την ολοκληρωτική έκφραση για την διατήρηση της μάζας σε διαφορική εξίσωση. Αυτή είναι μία συνήθης διαδικασία που θα χρησιμοποιήσουμε και στην αρχή διατήρησης της ορμής στο επόμενο κεφάλαιο. Εκεί θα δούμε και τη γενίκευσή της για κάθε φυσική ποσότητα, όπως θα εκφραστεί από το θεώρημα Ρεψνολδς (δες παράγραφο 4.6).

Έστω $d\vec{S}$ είναι ένα στοιχείο επιφάνειας πάνω στην S (το μέτρο του $d\vec{S}$ είναι το εμβαδόν του στοιχείου της επιφάνειας και η κατεύθυνση του στην εξωτερική της επιφάνειας κάθετο). Εάν $\vec{u}$ είναι η ταχύτητα ροής στο στοιχείο επιφάνειας, είναι φανερό ότι μόνο η συνιστώσα του $\vec{u}$ που είναι παράλληλη στο διάνυσμα $d\vec{S}$ (δηλ. κάθετη στην επιφάνεια) μεταφέρει υγρό εκτός του όγκου V. Ετσι ο όγκος του ρευστού που διέρχεται σε χρόνο dt μέσω της στοιχειώδους επιφάνειας $d\vec{S}$ είναι $\rho u_\perp dt dS = \rho\vec{u}\cdot d\vec{S}dt$, δηλ. είναι ο όγκος που έχει βάση το στοιχείο επιφάνειας dS και ύψος $u_\perp dt$ (δες Σχ. 3.1α). Έτσι η διαφεύγουσα ροή μάζας (μάζα ανά μονάδα χρόνου) είναι $\rho\vec{u}\cdot d\vec{s}$, με πρόσημο που εξαρτάται από τη γωνία, μεταξύ $\vec{u}$ και $d\vec{S}$, δηλ. έχουμε εκροή αν $\vec{u}\cdot d\vec{s} > 0$ και εισροή αν $\vec{u}\cdot d\vec{s} < 0$, όπως φαινεται στο Σχ. 3.1β. Προσθέτοντας την εκροή (ή εισροή) πάνω σε

[1] Σε αντίθετη περίπτωση, όπως π.χ. για χημικές αντιδράσεις σε σύνθετα ρευστά, ο ρυθμός παραγωγής μάζας πρέπει να ληφθεί υπόψη.



Σχήμα 3.1: Σχ. 3.1. Στοιχειώδης όγκος ελέγχου για την εξίσωση συνέχειας.

όλη την επιφάνεια έχουμε:

$$\text{Ρυθμός ροής μάζας μέσω } S: \quad \frac{dM}{dt} = -\oint_S \rho\vec{u}\cdot d\vec{S}, \tag{3.1}$$

και το '-' υπονοεί ελάττωση της μάζας εφόσον το ολοκλήρωμα είναι θετικό. Είναι δυνατόν το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης να είναι αρνητικό, πού σημαίνει ότι έχουμε εισροή ρευστού και επομένως αύξηση της μάζας στον όγκο V.

Ισοδύναμα μπορούμε να υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής της μάζας κατά τη ροή στον σταθερό όγκο V. Από τον ορισμό της μάζας

$$M(t) = \int_V \rho dV, \tag{3.2}$$

έχουμε το ρυθμό μεταβολής της, ως

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV, \tag{3.3}$$

όπου η παραγώγιση ως προς το χρόνο πέρασε μέσα στο ολοκλήρωμα (για σταθερό όγκο[2]). Στη συνέχεια εξισώνοντας το ρυθμό με τον οποίο φεύγει μάζα μέσω της επιφάνειας με το ρυθμό που ελαττώνεται η μάζα στον όγκο V έχουμε:

$$\oint_S \rho\vec{u}\cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u})dV = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV, \tag{3.4}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα *Gauss* για να μετατρέψουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα σε ολοκλήρωμα όγκου. Εφ'όσον η σχέση ισχύει για κάθε όγκο V, πρέπει οι ολοκληρωτέες ποσότητες να είναι ίσες σε κάθε σημείο του χώρου και έτσι έχουμε την διαφορική εξίσωση:

$$\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \quad \text{ή} \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = 0. \tag{3.5}$$

[2]Εφόσον θεωρήσαμε ότι ο όγκος V είναι σταθερός, δεν έχουμε μεταβολή των ορίων του όγκου ολοκλήρωσης. Ταυτόχρονα η παραγώγιση του $\rho(\vec{r},t)$ ως προς το χρόνο γίνεται μερική.

Η σχέση αυτή είναι γνωστή σαν *εξίσωση συνέχειας της μάζας* και στην παρούσα μορφή μας λέει ότι η τοπική μεταβολή της πυκνότητας συνδέεται με τη ροή μάζας μέσω της επιφάνειας ή ισοδύναμα με την απόκλιση της $\rho\vec{u}$, δηλ. το ρυθμό ροής μάζας μέσω της επιφάνειας ανά μονάδα όγκου[3] (δες (3.4)).

Είναι χρήσιμο να θυμηθούμε ανάλογες σχέσεις συνέχειας στον ηλεκτρομαγνητισμό (πυκνότητα φορτίου), κβαντομηχανική (πυκνότητα πιθανότητας). Έτσι εισάγουμε το αντίστοιχο ρεύμα πυκνότητας

$$\vec{j}_\rho = \rho\vec{u},$$

ώστε η εξίσωση συνέχειας μπορεί να γραφεί και ως

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_\rho = 0,$$

που μας λέει ότι η απόκλιση του ρεύματος πυκνότητας ισούται με το ρυθμό μεταβολής της πυκνότητας τοπικά.

Η (3.5) γράφεται και ως

$$\frac{D\rho}{Dt} \equiv \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\rho = -\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u}, \tag{3.6}$$

η

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} \equiv \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\rho\right) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{u}, \tag{3.7}$$

που εκφράζει ότι

σχετική αύξηση της πυκνότητας	=	σχετική μεταβολή	∼	αρνητικής
υγρού ¨σωματιδίου'		όγκου		απόκλισης ,
καθώς κινείται		σωματιδίου		

δηλ. σε μία μορφή όπου στο αριστερό μέρος έχουμε τη μεταβολή της πυκνότητας του ρευστού σωματιδίου καθώς κινείται. Αυτό υποδηλώνει στο αριστερό μέρος της (3.6), το σύμβολο

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla},$$

που ονομάζεται *υλική παράγωγος* (δες παράγραφο 3.4), και περιλαμβάνει και τη μεταβολή (όρος μεταφοράς) λόγω της μετατόπισης της μάζας, όταν έχουμε βαθμίδα πυκνότητας στο χώρο. Στο δεξιό μέρος της εξίσωσης έχουμε την απόκλιση του πεδίου ταχύτητας , που μας δίνει το σχετικό ρυθμό μεταβολής του όγκου του κινούμενου σωματιδίου (δες παράγραφο 2.6). Αν η απόκλιση μηδενίζεται τότε δεν έχουμε μεταβολή του όγκου του κινούμενου σωματιδίου, και η πυκνότητα του παραμένει σταθερή καθώς κινείται η μάζα.

Στην τελευταία σχέση πρέπει να διευκρινιστεί ότι για την ίδια αρχή διατήρησης δίνουμε διαφορετική ερμηνεία χρησιμοποιόντας διαφορετικό σύστημα περιγραφής. Στη μορφή της (3.5) είμαστε στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου και χρησιμοποιούμε ένα σταθερό όγκο στο σύστημα αυτό. Στη μορφή της (3.6) παρακολουθούμε το ¨σωματίδιο' που όμως είναι παραμορφώσιμο, δηλ. περιλαμβάνει συγκεκριμένα μόρια αλλά δεν έχει σταθερά όρια στο χρόνο, αν και

[3]Το αποτέλεσμα μπορούσε επίσης να βγεί αν θεωρούσαμε εξ' αρχής ένα στοιχειώδη όγκο (π.χ. κύβο για καρτεσιανές συντεταγμένες) και υπολογίζαμε το ρυθμό ροής μάζας ανά μονάδα όγκου. Το αποτέλεσμα θα ήταν η απόκλιση $\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u})$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες, για την περίπτωση του κύβου. Εδώ όμως το αποτέλεσμα βγήκε για τη γενική περίπτωση και δεν εξαρτάται από το στοιχειώδη όγκο. Είναι όμως χρήσιμη εξάσκηση να δοκιμαστούν διαφορετικοί στοιχειώδη όγκοι, επιβεβαιώνοντας τις γνωστές σχέσεις για την απόκλιση διανυσματικού πεδίου σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες.

για ελάχιστη μεταβολή του χρόνου δεν έχουμε σημαντική μεταβολή του όγκου, καθόσον ένα από τα χαρακτηριστικά του σωματιδίου είναι ότι δεν έχουμε σημαντική μεταβολή της ταχύτητας στα όρια του όγκου του. Υπάρχει όμως η δυνατότητα καθώς κινείται αυτό το παραμορφώσιμο σωματίδιο να μεταβάλλει την πυκνότητα του λόγω μεταβολής του όγκου του[4]. Η μεταβολή αυτή με το χρόνο μπορεί να γίνει με δύο τρόπους: (α) είτε με τοπική μεταβολή με το χρόνο ($\frac{\partial\rho}{\partial t}$), ή (β) λόγω της μεταφοράς του σωματιδίου σε περιοχή με διαφορετική τοπική πυκνότητα $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\rho$. Το σημαντικό στοιχείο εδώ είναι ότι παρακολουθούμε την κίνηση του σωματιδίου. Έτσι αν το σωματίδιο είναι ακίνητο ή η πυκνότητα είναι ομογενής στο χώρο, ο δεύτερος όρος δεν υπάρχει.

Παρόλο που ο χρόνος δεν εισέρχεται άμεσα στην (3.6) δεν σημαίνει ότι έχουμε απαραίτητα μόνιμη ροή. Απλώς οποιαδήποτε μεταβολή της ταχύτητας με το χρόνο σε κάποιο σημείο μεταδίδεται αυτόματα σε όλο το ρευστό ώστε να μην έχουμε μεταβολή του όγκου και να ισχύει η εξίσωση συνέχειας. Για μη ιδανικά υγρά είναι δυνατόν να έχουμε ασυνέχειες. Όπου έχουμε πολύ χαμηλή πίεση, λόγω της ροής δημιουργούνται φυσαλίδες που περιέχουν κορεσμένο ατμό ή αέρια (*cavity*). Τότε η σχέση της συνέχειας ισχύει για τον όγκο έξω από την οπή της φυσαλίδας. Στο εσωτερικό της φυσαλίδας έχουμε κορεσμένους ατμούς (αέρια μορφή ρευστού) που απαιτούν να υπάρχει πίεση στο εσωτερικό της που αντισταθμίζει την πίεση του εξωτερικού ρευστού στην επιφάνεια της φυσαλίδας.

3.2.1 Μακροσκοπική εξίσωση διατήρησης μάζας

Πολύ συχνά για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων αντί της εξίσωσης συνέχειας, που είναι σε διαφορική μορφή, είναι πιο χρήσιμο να χρησιμοποιήσουμε απ΄ ευθείας τη διατήρηση μάζας για κάποιο όγκο V, δηλ. σε ολοκληρωτική μορφή. Ο όγκος αυτός μπορεί να είναι σταθερός ή χρονικά μεταβαλλόμενος, αλλά προς το παρόν θα πάρουμε την περίπτωση σταθερού όγκου και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου. Έτσι από την (3.1) και (3.3) έχουμε

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV + \oint_S \rho(\vec{u}\cdot\hat{n}dS) = 0, \tag{3.8}$$

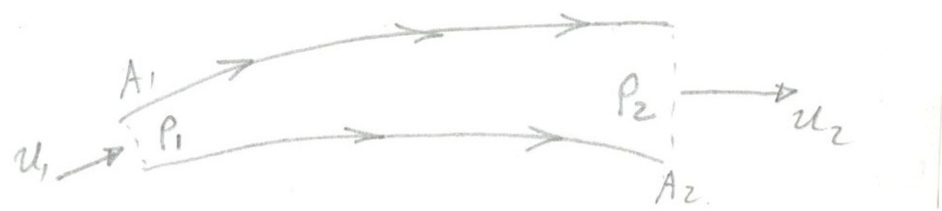
όπου S η επιφάνεια που περικλείει τον όγκο[5] V και $\hat{n}$ η μοναδιαία κάθετος στην επιφάνεια (ώστε $d\vec{S} = dS\hat{n}$), με διαφορετικό προσανατολισμό σε κάθε σημείο της επιφάνειας. Η (3.8) μας λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής της μάζας στο σταθερό όγκο V, οφείλεται στο ρυθμό ροής μάζας μέσω της περιβάλλουσας επιφάνειας. Εάν δε ο όγκος ελέγχου περιβάλλεται από εισόδους και εξόδους μικρής διατομής τότε έχουμε

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV + \sum_i \left(\rho_i A_i u_i\right)_{\text{εξ}} - \sum_j \left(\rho_j A_j u_j\right)_{\text{εισ}} = 0, \tag{3.9}$$

όπου ο δείκτης 'i' η ('j'') αριθμεί τις επιφάνειες, με ρ_i την πυκνότητα στην A_i επιφάνεια και u_i η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στην επιφάνεια A_i. Εάν οι διατομές είναι μικρές και είναι

[4] Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να βγάλουμε την (3.6) αν θεωρήσουμε τη διατήρηση της μάζας μέσα σε ένα νοητό όγκο $V(t)$, ο οποίος αλλάζει μορφή με το χρόνο, αλλά υπό την προϋπόθεση ότι περιλαμβάνει πάντα τα ίδια σωμάτια. Εδώ υποθέτουμε ότι η ταχύτητα είναι μία ομαλή συνάρτηση στο χώρο και το χρόνο. Η μεταβολή του όγκου συνδέεται φυσικά με το πεδίο της ταχύτητας στην επιφάνεια του όγκου.

[5] Ο όγκος αυτός συχνά αναφέρεται ως *όγκος ελέγχου* και η αντίστοιχη επιφάνεια S ως *επιφάνεια ελέγχου*. Εν γένει, όγκος ελέγχου είναι ένας όγκος ο οποίος ορίζεται από μία ιδεατή επιφάνεια (μέρος ή όλο της οποίας μπορεί να είναι και φυσικό όριο). Στην παρούσα περίπτωση ο όγκος ελέγχου είναι σταθερός, αλλά σε άλλες περιπτώσεις θα μπορούσαμε να τον επιλέξουμε ώστε να κινείται ή να παραμορφώνεται κατ΄ επιλογή. Ένας τέτοιος όγκος όμως, στο όριο μικρών διαστάσεων δεν αποτελεί σωματίδιο με την έννοια της μηχανικής κατά *Lagrange*, εκτός αν διατηρεί τη μάζα του. Αυτό σημαίνει ότι κατά μέσο όρο και με μικρές αποκλίσεις τα ίδια μόρια ρευστού παραμένουν στον όγκο επιλογής.



Σχήμα 3.2: Σχ. 3.2. Όγκος για τη διατήρηση μάζας μέσω σωλήνα ροής.

επιλεγμένες κάθετες στο σωλήνα ροής, τότε η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας u_i είναι ίση με το μέτρο της ταχύτητας στο σημείο αυτό. Στον τελευταίο όρο έχουμε αντίθετο πρόσημο, διότι η ροή είναι προς τα μέσα και τείνει να αυξήσει την πυκνότητα. Εάν δε η ροή είναι μόνιμη[6] τότε $\partial\rho/\partial t = 0$ και η (3.8) γίνεται

$$\oint_S \rho(\vec{u}\cdot\hat{n}dS) \equiv \sum_i (\rho_i A_i u_i)_{\text{εξ}} - \sum_j (\rho_j A_j u_j)_{\text{εισ}} = 0, \tag{3.10}$$

που μας λέει ότι σε μόνιμη ροή, η ροή μάζας προς τα έξω αντισταθμίζεται από τη ροή μάζας προς το εσωτερικό του όγκου. Ανεξαρτησία της πυκνότητας από το χρόνο δε σημαίνει απαραίτητα ότι έχουμε σταθερή πυκνότητα στο χώρο. Για τη γεωμετρία του Σχ. 3.2 όπου η πλευρική επιφάνεια αποτελείται από τα τοιχώματα ενός σωλήνα ροής έχουμε

$$\rho_1 A_1 u_1 = \rho_2 A_2 u_2, \tag{3.11}$$

καθώς για μόνιμη ροή δεν έχουμε ροή μέσω των πλάγιων τοιχωμάτων. Το ίδιο ισχύει και για ένα σωλήνα με στερεά τοιχώματα αν παραλείψουμε το ιξώδες, καθόσον τα τοιχώματα και αδιαπέραστα είναι και αποτελούν επιφάνεια γραμμών ροής. Εάν δε η πυκνότητα είναι και σταθερή στο χώρο για ασυμπίεστο ρευστό έχουμε

$$A_1 u_1 = A_2 u_2. \tag{3.12}$$

3.3 Ασυμπίεστο ρευστό

Εάν η πυκνότητα ρ δε μεταβάλλεται στο χώρο αλλά και στο χρόνο, ή καλύτερα αν $\frac{D\rho}{Dt} = 0$, έχουμε την απλούστερη σχέση για την εξίσωση συνέχειας

$$\text{ασυμπίεστο} \quad \text{ρευστό} \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0. \tag{3.13}$$

Το πεδίο ταχύτητας με ασυμπίεστο ρευστό είναι μη αποκλίνον. Αντίστροφα μπορούμε να πούμε ότι αν το πεδίο ταχύτητας είναι μη αποκλίνον, τότε η πυκνότητα του ρευστού σωματιδίου καθώς κινείται στην τροχιά του είναι σταθερή. Αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι η πυκνότητα είναι σταθερή στο χρόνο και στο χώρο. Απλώς σημαίνει ότι η τοπική μεταβολή της πυκνότητας εξουδετερώνεται από τη μεταβολη λόγω μεταφοράς σε περιοχή με διαφορετική πυκνότητα, έτσι ώστε η υλική παράγωγος της πυκνότητας μηδενίζεται.

[6] Για να ισχύει ότι $\partial\rho/\partial t = 0$ δεν αρκει το πεδίο ταχύτητας να είναι μόνιμο, αλλά προυποθέτει ότι και οι άλλες υδροδυναμικές ποσότητες δεν επιρεάζονται απο παραμέτρους που μεταβάλλονται με το χρόνο.

Αξίζει εδώ να δούμε την αναλογία με το ηλεκτροστατικό πεδίο $\vec{E}$ λόγω κατανομής ηλεκτρικού φορτίου πυκνότητας $\rho(\vec{r})$. Η αντίστοιχη εξίσωση $Maxwell$ είναι

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_o}.$$

Επειδή ο στροβιλισμός του ηλεκτρικού πεδίου είναι μηδέν (για χρονοανεξάρτητο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο), μπορούμε να πούμε ότι το ηλεκτρικό φορτίο είναι η πηγή του ηλεκτρικού πεδίου καθόσον ορίζει την απόκλισή του. Κάνοντας την αναλογία με την (3.6) για το πεδίο ταχύτητας ροής, περιμένουμε ότι όπου έχουμε απόκλιση ($\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \neq 0$), εκεί έχουμε και πηγές του πεδίου. Στην περίπτωση του πεδίου ταχύτητας ροής, η πηγή του πεδίου είναι η υλική παράγωγος της πυκνότητας του ρευστού, όπως φαίνεται στην (3.6). Για την περίπτωση του ρευστού η εικόνα είναι αρκετά πιο πολύπλοκη, διότι η ταχύτητα υπάρχει και στο αριστερό μέρος της (3.6) και όταν ακόμη έχουμε χρονοανεξάρτητη ροή. Η απλή περίπτωση της ασυμπίεστης ροής αντιστοιχεί σε ηλεκτρικό πεδίο χωρίς φορτία στο χώρο. Η αναλογία με το ηλεκτρικό πεδίο δεν μπορεί να τραβηχτεί στα άκρα, διότι ο μεν στροβιλισμός του ηλεκτρικού πεδίου μηδενίζεται για μη χρονοεξαρτημένα πεδία, αλλά στο πρόβλημα της ροής έχουμε στροβιλισμό ακόμη και για μόνιμη ροή.

Η εξίσωση συνέχειας της μάζας για ασυμπίεστη ροή ($\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$), μπορεί να γραφεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες σαν

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

που μάς λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ενός σωματιδίου είναι μηδέν. Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε κατά τη ροή συμπίεση ενός στοιχειώδους ρευστού σωματιδίου με όγκο $dxdydz$ στην $z-$κατεύθυνση, τότε το ρευστό κινείται προς το κέντρο του σωματιδίου με ρυθμό παραμόρφωσης $-\frac{\partial w}{\partial z}$. Αυτό φαίνεται αν υπολογίσουμε τη σχετική ταχύτητα των δύο απέναντι πλευρών που απέχουν κατα dz. Αυτή είναι

$$(w + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{2}) - (w - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{2}) = \frac{\partial w}{\partial z}dz,$$

και αν $\frac{\partial w}{\partial z} < 0$, αυτό αντιστοιχεί σε ελάττωση όγκου κατά $\frac{\partial w}{\partial z}dxdydz$, και ο ρυθμός σχετικής μεταβολής όγκου είναι $\frac{\partial w}{\partial z}$. Αυτό στη συνέχεια θα δημιουργήσει ροή του ρευστού προς τα έξω στην $x-$ και $y-$ κατεύθυνση με ρυθμούς $\frac{\partial u}{\partial x}$ και $\frac{\partial v}{\partial y}$ αντίστοιχα, ώστε ο όγκος του παραμορφωμένου σωματιδίου παραμένει σταθερός για κάθε χρονική στιγμή. Αυτό φαίνεται στο Σχ. 3.3 για μία διδιάστατη ροή. Δεν είναι απαραίτητο και οι άλλοι δύο ρυθμοί παραμόρφωσης να είναι θετικοί. Αρκεί ένας, έτσι ώστε να ικανοποιείται ο μηδενισμός της απόκλισης.

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες η εξίσωση συνέχειας για ασυμπίεστο ρευστό είναι

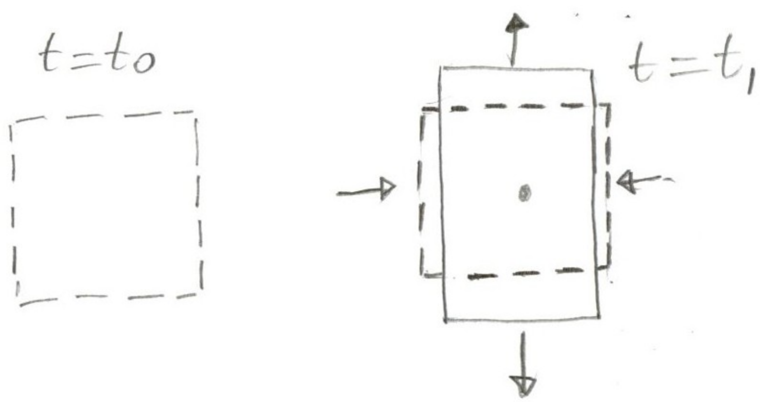
$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \tag{3.14}$$

όπου (u_r, u_ϕ, u_z) είναι οι συνιστώσες του πεδίου ταχύτητας σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Εάν π.χ. έχουμε αξοσυμμετρική κυλινδρική ροή (χωρίς ϕ εξάρτηση), η ακτινική ροή προς τα μέσα δίνει $\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}$ που αντισταθμίζεται από την ροή προς τα έξω στην $z-$κατεύθυνση, ώστε $\frac{\partial w}{\partial z} < 0$.

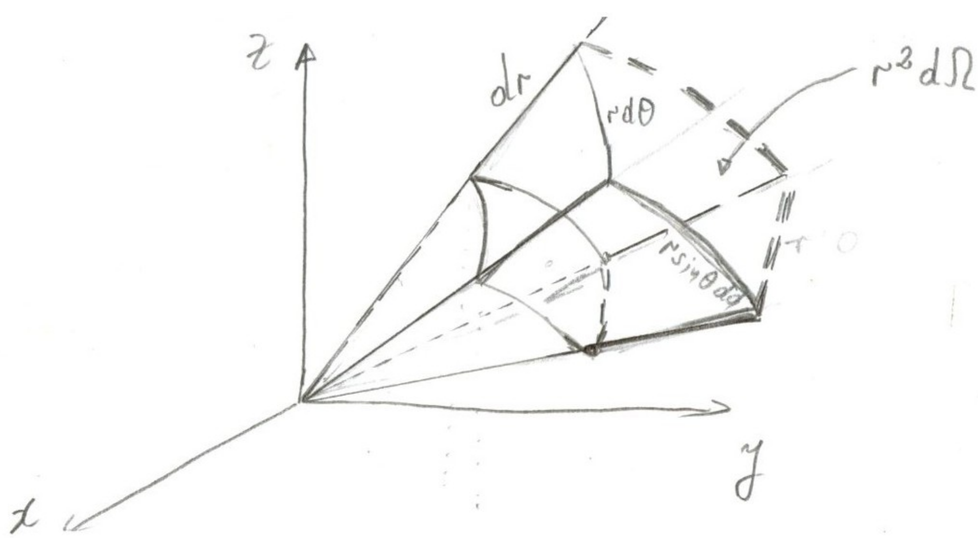
Σε σφαιρικές συντεταγμένες η εξίσωση συνέχειας για ασυμπίεστη ροή είναι

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(u_\phi) = 0. \tag{3.15}$$

Μία αναφορά στο Σχ. 3.4 εύκολα μας οδηγεί στο αποτέλεσμα. Αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της απόκλισης από το θεώρημα $Gauss$ και να κατανοήσουμε ότι στον υπολογισμό της



Σχήμα 3.3: Σχ. 3.3. Σμίκρυνση στην $y-$κατεύθυνση για διδιάστατη ροή συνεπάγεται μεγένθυση στην x-κατεύθυνση, ώστε το εμβαδόν να διατηρείται σταθερό.



Σχήμα 3.4: Σχ. 3.4. Στοιχειώδης όγκος για τον υπολογισμό της απόκλισης σε σφαιρικές συντεταγμένες.

ροής δια μέσω των αντίθετων επιφανειών είναι δυνατόν να μεταβάλλεται όχι μόνο το μέτρο της ταχύτητας αλλά και το εμβαδόν της επιφάνειας.

Π.χ. η ροή μέσω των ακτινικών επιφανειών (με καθέτους $\hat{e}_r$ και $-\hat{e}_r$ αντίστοιχα) είναι

$$(u_r r^2 d\Omega)|_{r+dr/2} - (u_r r^2 d\Omega)|_{r-dr/2} = \frac{\partial}{\partial r}(u_r r^2) d\Omega dr,$$

και η ροή ανά μονάδα όγκου $dV = r^2 d\Omega dr$ είναι

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(u_r r^2),$$

που είναι ο πρώτος όρος στην (3.15). Η ροή μέσω των εφαπτομενικών επιφανειών με καθέτους στην $\hat{e}_\theta$ κατεύθυνση είναι

$$(u_\theta r \sin\theta d\phi dr)|_{\theta+d\theta/2} - (u_\theta r \sin\theta d\phi dr)|_{\theta-d\theta/2} = r d\phi dr d\theta \frac{\partial}{\partial \theta}(u_\theta \sin\theta)$$

και διαιρώντας με τον όγκο $dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$ έχουμε το δεύτερο όρο, ενώ ο τελευταίος όρος αφήνεται για εξάσκηση.

3.3.1 Συμπιεστότητα και αριθμός $Mach$

Η εξίσωση συνέχειας από την σχέση (3.6) θα μπορούσε να γραφεί επίσης ως:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{\nabla} \cdot u + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho \;\; = \;\; 0, \tag{3.16}$$

και ισχύει για κάθε περίπτωση, καθόσον εκφράζει την βασική αρχή διατήρησης της μάζας, υποθέτοντας φυσικά ότι δεν έχουμε παραγωγή μάζας. Ο πρώτος όρος είναι ο ρυθμός μεταβολής της πυκνότητας σε συγκεκριμένο σημείο και η ύπαρξή του προυποθέτει μή μόνιμη ροή. Εδώ να παρατηρήσω ότι μιλάμε κυρίως για μεταβολές λόγω της πίεσης άμεσα, ή μέσω του πεδίου ταχύτητας. Δεν θεωρούμε προς το παρόν μεταβολές της πυκνότητας λόγω της θερμοκρασίας, της περιεκτικότητας σε προσμίξεις, π.χ. αλάτι στο θαλασσινό νερό, κτλ.. Ο δεύτερος όρος δίνει διόγκωση του υγρού (και επομένως ελάτωση της πυκνότητας) αν $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} > 0$ και συμπίεση αν $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} < 0$, κατά την κίνησή του. Ο δε τελευταίος όρος που περιέχει το $\vec{\nabla}\rho$ δίνει χωρική μεταβολή της πυκνότητας και όπως θα δείξουμε είναι πιό μικρός από τους άλλους για συνήθεις μή μόνιμες ροές, όπως είναι η διάδοση κυμάτων. Φυσικά σε ένα πραγματικό ρευστό δεν περιμένουμε να είναι απόλυτα ασυμπίεστο. Τούτο γίνεται αντιληπτό από τη δυνατότητα διάδοσης ακουστικών κυμάτων, γεγονός που προυποθέτει τη δημιουργία περιοχών συμπίεσης. Έτσι είναι χρήσιμο να δούμε ποιές είναι οι προϋποθέσεις για να θεωρήσουμε ένα ρευστό ασυμπίεστο.

Π.χ ας θεωρήσουμε ένα μονοδιάστατο ημιτονοειδές ακουστικό κύμα όπου η μεταβολή της πυκνότητας δίνεται από την σχέση:

$$\rho(x,t) \;\; = \;\; A \sin(kx - \omega t), \tag{3.17}$$

όπου η συχνότητα ω και το κυματοδιάνυσμα k συνδέονται με την σχέση διασποράς $\omega = ck$ για ακουστικά κύματα, όπου c είναι η ταχύτητα του ήχου. Ο λόγος του τρίτου προς τον πρώτο όρο είναι

$$u \cdot \frac{\partial \rho / \partial x}{\partial \rho / \partial t} \;\; = \;\; \frac{u}{c}, \tag{3.18}$$

όπου c η ταχύτητα του ήχου[7] και u η χαρακτηριστική ταχύτητα ροής. Αλλά για συνήθεις ροές $\frac{u}{c} \ll 1$ και επομένως ακόμα και για συμπιεστά ρευστά μπορούμε να παραλείψουμε τον όρο

[7] $c = m/sec$ για το νερό

μεταφοράς ($\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\rho$), αν η ταχύτητα ροής είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα των ακουστικών κυμάτων στο ρευστό. Υπάρχουν όμως εξαιρέσεις όπως π.χ σε κύματα σοκ όπου η μεταβολή της πυκνότητας στο χώρο είναι σχεδόν άπειρη με ταχύτητες μεγαλύτερες του c. Αυτή η περίπτωση είναι αντικείμενο ενός πιο ειδικευμένου κεφαλαίου που περιλαμβάνει και θερμοδυναμική θεώρηση.

Ο λόγος της ταχύτητας ροής προς την ταχύτητα του ήχου ονομάζεται αριθμός $Mach$[8] (συμβολίζεται ως Ma)

$$\text{αριθμός} \quad Mach \quad = \frac{\text{ταχύτητα} \quad \text{ροής}}{\text{ταχύτητα ήχου}} = \frac{u_0}{c}, \tag{3.19}$$

όπου u_0 είναι η χαρακτηριστική ταχύτητα της ροής. Εάν ο αριθμός $Mach$ είναι μικρός ($Ma < 0.3$), τότε μπορούμε να παραλείψουμε τον όρο $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\rho$ σε σύγκριση με τον $\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$.

Η κύρια διαφορά μεταξύ υδροδυναμικής και αεροδυναμικής είναι στην ιδιότητα της συμπιεστότητας, η οποία συνδέεται και με την ταχύτητα του ήχου στο αντίστοιχο μέσο. Χαρακτηριστικές τιμές για τον αέρα και το νερό είναι

$$c_s(\text{αέρα}) = 300m/sec, \quad c_s(\text{νερό}) = 1200m/sec, \frac{c_s(\text{αέρα})}{c_s(\text{νερό})} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\rho(\text{αέρα})}{\rho(\text{νερό})} = 10^{-3}, \tag{3.20}$$

Για συνήθεις ροές στον αέρα, $v(\text{αέρα}) \approx 20km/hr \gg v(\text{νερό})$,

$Mach(\text{αέρα})$ $\approx \mathrm{O}(1)$ συμπιεστό

$Mach((\text{νερό}))$ $\ll 1$ ασυμπίεστο

Στη συνέχεια θα περιοριστούμε σε μία μονοδιάσταση ροή για να δείξουμε ότι η συνθήκη για την παράλειψη του τρίτου όρου στην (3.16) σε σχέση με το δεύτερο είναι επίσης $Ma \ll 1$, γενικεύοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα για την ειδική περίπτωση διάδοσης ημιτονοειδούς ακουστικού κύματος. Σε μία διάσταση θέλουμε

$$|u\frac{\partial\rho}{\partial x}| \ll |\rho\frac{\partial u}{\partial x}| \qquad \text{ή} \qquad |\frac{\delta\rho}{\rho}| \ll |\frac{\delta u}{u}|. \tag{3.21}$$

Όπως θα δούμε αργότερα η ταχύτητα του ήχου σε ρευστά ικανοποιεί[9]

$$c^2 = \frac{\partial P}{\partial\rho}, \tag{3.22}$$

όπου P η πίεση. Έτσι για μεταβολή της πυκνότητας κατά $\delta\rho$ έχουμε μεταβολή της πίεσης κατά

$$\delta P = c^2\delta\rho.$$

Η μεταβολή της πίεσης, όμως, σύμφωνα με την αρχή του $Bernoulli$[10] συνδέεται και με μεταβολή της ταχύτητας ροής στο ίδιο σημείο. Έχουμε λοιπόν

$$\delta P = -\rho u\delta u. \tag{3.23}$$

[8] Δες Κεφ. ;;

[9] Δες Κεφ. ;;. Η σχέση $\rho(P)$ είναι μία καταστατική σχέση. Έτσι για την περίπτωση του ασυμπίεστου ρευστού μπορούμε να πούμε ότι η ταχύτητα του ήχου είναι άπειρη και οποιαδήποτε διαταραχή μεταβιβάζεται ταυτόχρονα σε όλο τον όγκο του ρευστού. Εν γένει η ταχύτητα του ήχου αυξάνει αντίστροφα με την συμπιεστότητα.

[10] Η αρχή του $Bernoulli$ είναι η έκφραση της διατήρησης της ενέργειας. Με ορισμένες προυποθέσεις, που θα δούμε αργότερα, γράφεται ως

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}u^2 = \text{ σταθερά.}$$

Διαιρώντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις και παίρνοντας απόλυτες τιμές, έχουμε

$$\frac{|\delta\rho/\rho|}{|\delta u/u|} = \frac{u^2}{c^2} = Ma^2. \tag{3.24}$$

Η σχέση αυτή μπορεί να γενικευτεί σε τρείς διαστάσεις. Στην (3.23) παραλείψαμε τη μεταβολή της πυκνότητας σε σχέση με τη μεταβολή της ταχύτητας, αλλά το αποτέλεσμα της (3.24) μας δικαιώνει. Εν γένει, όταν ο αριθμός $Mach$ είναι μικρός, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ροή είναι ασυμπίεστη. Έτσι, η ροή αέρα με ταχύτητα μικρότερη από $100m/sec$ μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ασυμπίεστη. Η υπόθεση της μη συμπιεστότητας στα υγρά είναι ισοδύναμη με $u \ll c$. Για συνήθεις ταχύτητες ροής μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οποιαδήποτε διακύμανση στην πυκνότητα μεταδίδεται ακαριαία χωρίς τη δυνατότητα δημιουργίας κυμάτων.

3.4 Υλική παράγωγος

Στη μετάβαση στο συνεχές είδαμε ότι για να περιγράψουμε τη ροή, αρκεί ένας μικρός αριθμός από μακροσκοπικές μεταβλητές, τις οποίες θεωρούμε συναρτήσεις της θέσης $\vec{r}$ στο χώρο και του χρόνου t. Τέτοιες π.χ. είναι η πυκνότητα $\rho(\vec{r},t)$, η τοπική ταχύτητα $\vec{u}(\vec{r},t)$, η τοπική πίεση $P(\vec{r},t)$ και η τοπική θερμοκρασία $T(\vec{r},t)$. Έτσι έχουμε μία σημαντική απλοποίηση διότι απαλείψαμε τις συντεταγμένες των σωματιδίων, οι οποίες είναι άπειρες τον αριθμό. Στην περιγραφή $Euler$ όμως υπάρχει μία σημαντική αδυναμία όταν θέλουμε να γράψουμε την εξίσωση Νεύτωνα[11]

$$\rho\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}$$

για την κίνηση μιάς ¨ρευστής μάζας' με σταθερή πυκνότητα ρ και $\vec{f}$ τη δύναμη ανά μονάδα όγκου του ρευστού. Στη σωματιδιακή μηχανική η επιτάχυνση ενός σωματιδίου (που μπαίνει στην εξίσωση του Νεύτωνα) προϋποθετει ότι παρακολουθούμε την κίνηση του σωματιδίου κατά μήκος της τροχιάς του. Το ίδιο πρέπει να κάνουμε και εδώ. Δηλ. να θεωρήσουμε ένα νοητό σωματίδιο εμφυτευμένο στο σώμα του ρευστού και να ακολουθήσουμε την τροχιά του. Το ερώτημα είναι πως γράφουμε την επιτάχυνση στην περιγραφή $Euler$ χρησιμοποιόντας το πεδίο ταχύτητας $\vec{u}(\vec{r},t)$; Το σίγουρο είναι ότι δεν είναι απλώς $\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}$, διότι εδώ δέν έχουμε καθόλου μετατόπιση, αλλά απλώς παρακολουθούμε την τοπική (σε σταθερό σημείο) μεταβολή της ταχύτητας με τό χρόνο. Έτσι π.χ. αν είχαμε μία κυκλική μόνιμη (ανεξάρτητη του χρόνου) ροή, η μερική παράγωγος μας δίνει μηδέν, αλλα γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση αυτή έχουμε κεντρομόλο επιτάχυνση.

Για να βρούμε την επιτάχυνση πρέπει να υπολογίσουμε την μεταβολή της ταχύτητας του σωματιδίου σε χρόνο δt, καθώς έχει μετατοπιστεί κατά $\delta\vec{r}(t)$, δηλ.

$$\text{επιτάχυνση ¨σωματιδίου'} = \frac{\vec{u}(\vec{r}+\delta\vec{r},t+\delta t) - \vec{u}(\vec{r},t)}{\delta t}, \tag{3.25}$$

όπου στο χρόνο δt το σωματίδιο που ήταν στην θέση $\vec{r}$ μετατοπίστηκε κατά

$$\delta\vec{r} = \vec{u}\delta t$$

καθόσον για μικρό δt η μετατόπιση είναι παράλληλη προς την ταχύτητα ή αλλιώς για μικρό χρονικό διάστημα η γραμμή ροής και η τροχιά του σωματιδίου διαφέρουν ελάχιστα.

Όπως είδαμε το πεδίο ταχύτητας $\vec{u}(\vec{r},t)$ δεν περιγράφει την ταχύτητα κάποιου σωματιδίου και επομένως η επιτάχυνση της μάζας του υγρού δεν είναι απλώς η παράγωγος ως προς το χρόνο. Η μερική παράγωγος $\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας σε κάποιο σταθερό σημείο στο

[11] Η οποία είναι στο σωματιδιακό πνεύμα του $Lagrange$.

χώρο, από το οποίο διέρχονται όμως συνεχώς νέα μόρια. Η επιτάχυνση όμως πρέπει να οριστεί για το σωματίδιο του υγρού, ως ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του καθώς η μάζα αυτή κινείται και διέρχεται από συνεχόμενα σημεία της τροχιάς. Αυτή θα είναι η επιτάχυνση η οποία θα μπει στον αντίστοιχο νόμο του Νεύτωνα για το συνεχές μέσο.

Η παραπάνω παρατήρηση ισχύει για κάθε φυσική ποσότητα $T(\vec{r},t)$. Δηλαδή με άλλα λόγια το ερώτημα είναι το εξής: Αν η τιμή του T στο σημείο $\vec{r}=\vec{r_0}$ σε χρόνο $t=t_0$ είναι T_0, τότε ποια είναι η τιμή του στο σημείο $\vec{r}=\vec{r_0}+\vec{u}dt$, στον χρόνο $t=t_0+dt$ καθώς $dt\to 0$, όπου $\vec{u}$ η ταχύτητα του υγρού και όπου $d\vec{r}=\vec{u}dt$ είναι η μεταβολή της θέσης της μάζας σε χρόνο dt. Η περίπτωση αυτή έχει εφαρμογή για το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας στο εξωτερικό μιας κινούμενης βάρκας. Είναι προφανές ότι η θερμοκρασία μεταβάλλεται και χρονικά και λόγω της μετακίνησης σε νερά με διαφορετική θερμοκρασία. Ο ρυθμός αυτός είναι διαφορετικός από αυτόν που θα μετρήσει μια ακίνητη βάρκα στο εξωτερικό της, που είναι απλώς η μερική παράγωγος.

Εν γένει λοιπόν η μικρή μεταβολή δT που οφείλεται σε μικρές μεταβολές δt του χρόνου, και $\delta x, \delta y, \delta z$ στις καρτεσιανές συντεταγμένες θέσης είναι:

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial t}\delta t+\frac{\partial T}{\partial x}\delta x+\frac{\partial T}{\partial y}\delta y+\frac{\partial T}{\partial z}\delta z \tag{3.26}$$

και ο ρυθμός μεταβολής είναι:

$$\frac{\delta T}{\delta t} = \frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial T}{\partial x}u+\frac{\partial T}{\partial y}v+\frac{\partial T}{\partial z}w \tag{3.27}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε

$$\vec{u}=\frac{\delta\vec{r}}{\delta t}=(u\hat{\imath}+v\hat{\jmath}+w\hat{k}).$$

Στο όριο $\delta t\to 0$ αυτή η παράγωγος ονομάζεται *υλική παράγωγος*, συμβολίζεται[12] ως $\frac{d}{dt}$ η ως $\frac{D}{Dt}$ για να τονιστεί η ιδιαίτερη φυσική του σημασία, ότι είμαστε στην περιγραφή *Euler* και όπως τονίσαμε παρακολουθεί τη στοιχειώδη μάζα του υγρού κατά τη μετακίνηση του (γι' αυτό και συχνά ονομάζεται σωματιδιακή παράγωγος).

$$\text{Υλική παράγωγος} \equiv \text{Χρονική παράγωγος καθώς ακολουθούμε την κίνηση.}$$

Η (3.26) γράφεται εν συντομία:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t}+\vec{u}\cdot\vec{\nabla}T \tag{3.28}$$

και μας οδηγεί στον ορισμό του τελεστή:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}) \tag{3.29}$$

$$\text{Υλική παράγωγος} \equiv \text{τοπική παράγωγος} + \text{παράγωγος μεταφοράς.}$$

Ο τελεστής αυτός με τη δράση του σε οποιαδήποτε φυσική ποσότητα μας δίνει το ρυθμό μεταβολής όχι σε σταθερό σημείο του χώρου, αλλά καθώς παρακολουθούμε την κίνηση της μάζας

[12] Η υλική παράγωγος διαφέρει από την ολική παράγωγο αν και συχνά χρησιμοποιείται ο ίδιος συμβολισμός, δηλ. $\frac{d}{dt}$. Η διαφορά έγκειται στο ότι η μεν ολική παράγωγος αναφέρεται στην περιγραφή *Lagrange* ενώ η υλική παράγωγος αναφέρεται στην περιγραφή *Euler*. Αλλά και στις δύο περιπτώσεις αναφέρονται σε παράγωγο καθώς παρακολουθούμε την κίνηση του σωματιδίου.

Σχήμα 3.5: Σχ. 3.5. Μεταβολές κατά την παρακολούθηση ενός σωματιδίου στο $x-y$ επίπεδο. (α) Η χρονική παράγωγος στο C είναι η τοπική μεταβολή της θερμοκρασίας Τ κατά *Euler*. (β) Στην χρονική παρακολούθηση του σωματιδίου, για την μεταβολή της θερμοκρασίας καθώς περνά στο σημείο C πρέπει να προσθέσουμε και τον όρο μεταφοράς.

που σε χρόνο $t = t_0$ είχε κέντρο το σημείο (x_0, y_0, z_0). Ο τελεστής D/Dt όπως φαίνεται στην (3.29), λόγω του αναλείωτου του εσωτερικού γινομένου, δεν εξαρτάται από τις συγκεκριμένες συντεταγμένες που χρησιμοποιήσαμε, κάτι που είναι σύμφωνο και με τη φυσική μας διαίσθηση. Έτσι π.χ. αντί για καρτεσιανές συντεταγμένες θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες. Ιδιαίτερα δε αν η ροή έχει κυλινδρική συμμετρία, η δεύτερη είναι η ενδεδειγμένη επιλογή.

Το φυσικό νόημα της (3.27) ή (3.28) είναι το εξής: Η θερμοκρασία μιας μάζας ρευστού εν κινήσει μεταβάλλεται είτε διότι όλο το πεδίο της θερμοκρασίας μεταβάλλεται με το χρόνο (δηλ. ο όρος $\frac{\partial T}{\partial t}$), είτε διότι η μάζα μετακινήθηκε σε μια περιοχή όπου η θερμοκρασία είναι διαφορετική, δηλ. $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\cdot T$. Ο δεύτερος όρος οφείλεται αποκλειστικά στη μεταφορά του υγρού κατά μήκος μιας καμπύλης C και θα μπορούσαμε να τον ονομάσουμε ρυθμό *μεταβολής λόγω μεταφοράς*. Το τελευταίο ισχύει και αν ακόμη η θερμοκρασία σε κάθε σημείο είναι ανεξάρτητη του χρόνου, (δηλ. $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$), αλλά δεν υπάρχει αν δεν έχουμε ροή υγρού δηλαδή αν $\vec{u} = 0$ ή αν $\vec{\nabla}T = 0$. Επειδή η $\vec{\nabla}T$ μας δίνει την κατεύθυνση της μέγιστης μεταβολής της θερμοκρασίας, είναι αναμενόμενο ότι η μεταβολή της θερμοκρασίας της μάζας εν κινήσει θα εξαρτάται από την προβολή της ταχύτητας στην κατεύθυνση αυτή, ενώ ταυτόχρονα εξαρτάται και από το μέτρο της $\left|\vec{\nabla}T\right|$ και ταχύτητας $|\vec{u}|$.

Από τα παραπάνω εξάγεται ότι για κάθε μόνιμη ροή, ο ρυθμός μεταβολής οποιασδήποτε ποσότητας f καθώς ακολουθούμε το ρευστό σωματίδιο είναι $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})f$. Είναι εύκολο να δούμε ότι έτσι είναι. Έστω $\hat{e}_s$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο στη γραμμή ροής στο σημείο s και στην ίδια κατεύθυνση όπως η ροή. Τότε

$$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})f = (|\vec{u}|\hat{e}_s\cdot\vec{\nabla})f = |\vec{u}|\frac{\partial f}{\partial s},$$

όπου s είναι η απόσταση κατά μήκος της γραμμής ροής. Αλλά $\frac{\partial f}{\partial s}$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της f με την απόσταση κατά μήκος της γραμμής ροής. Αν τον πολλαπλασιάσουμε με το μέτρο της ταχύτητας ροής $|\vec{u}|$ θα μας δώσει το ρυθμό μεταβολής με το χρόνο καθώς ακολουθούμε το σωματίδιο ρευστού κατά μήκος της γραμμής ροής. Εάν δε συμβαίνει να έχουμε $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})f = 0$, τότε η f είναι σταθερή κατά μήκος της γραμμής ροής που διέρχεται από το σημείο.

Ο όρος $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})f$ μηδενίζεται σε τρείς περιπτώσεις, οπότε έχουμε μόνο τοπική μεταβολή $(\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t})$:

- αν $\vec{u} = 0$.
- $\vec{\nabla}f = 0$, δηλ. ομογενές πεδίο f.
- $\vec{u}$ είναι εφαπτόμενο στις επιφάνειες σταθερού f.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό της υλικής παραγώγου, μπορούμε να ξαναγράψουμε την γενική συνθήκη συνέχειας ως:

$$\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\rho, \tag{3.30}$$

που είναι ισοδύναμη με:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u}, \tag{3.31}$$

που λέει ότι αν παρακολουθήσουμε την μάζα του υγρού εν κινήσει η πυκνότητα δεν αλλάζει όταν η ροή είναι μη αποκλίνουσα ($\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$).

Ας επανέλθουμε τώρα στην επιτάχυνση του υγρού δηλαδή στην μεταβολή της ταχύτητας $\vec{u}$ ακολουθώντας την κίνηση του υγρού, η οποία φυσικά είναι διανυσματικό μέγεθος. Οι τρεις συνιστώσες του είναι βαθμωτά πεδία και μπορούμε για κάθε συνιστώσα της ταχύτητας $\vec{u} = (u, v, w)$ να γράψουμε την αντίστοιχη της εξίσωσης (3.28), δηλαδή:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})u, \tag{3.32}$$

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})v, \tag{3.33}$$

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})w, \tag{3.34}$$

ή προσθέτοντας διανυσματικά τις τρεις σχέσεις:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u}. \tag{3.35}$$

3.5 Επιτάχυνση του ρευστού σωματιδίου

Με ένα σύστημα, το οποίο κινείται, δεν συνδέουμε μόνο την επιτάχυνση, αλλά και άλλες βαθμωτές ή διανυσματικές ποσότητες, όπως η ορμή, η ενέργεια,στροφορμή, κυκλοφορία κτλ. Είναι προφανές ότι για οποιαδήποτε διανυσματική ποσότητα $\vec{A}$ που μεταφέρεται με την ύλη, έχουμε για τον ολικό ρυθμό μεταβολής της καθώς ακολουθούμε την ροή:

$$\frac{D\vec{A}}{Dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}, \tag{3.36}$$

όπου τώρα ο τελεστής $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})$ μπορεί να δράσει στο $\vec{A}$, αφού προηγουμένως υπολογίσουμε την ανάπτυξή του σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Ανάλογα με τη συμμετρία του προβλήματος άλλες συντεταγμένες (π.χ. κυλινδρικές, σφαιρικές, κ.τ.λ.) αποτελούν καλύτερη επιλογή. Η υλική αυτή μεταβολή οφείλεται σε καποιους παράγοντες τους οποίους πρέπει να γνωρίζουμε. Π.χ. για τον ρυθμό μεταβολής του συστήματος πρέπει να γνωρίζουμε τις εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα σε κάθε χρονική στιγμή. Για τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής πρέπει να γνωρίζουμε τις εξωτερικές ροπές που ασκούνται στο κινούμενο ρευστό σωματίδιο κ.ο.κ..

Η ποσότητα

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt}, \quad \text{στιγμιαία επιτάχυνση ρευστού σωματιδίου}$$

είναι η στιγμιαία επιτάχυνση της μάζας του υγρού στο σημείο (ξ,ψ,ζ).

Εάν παρακολουθήσουμε τη ροή στους καταράκτες της Έδεσσας θα δούμε ότι η ροή είναι μόνιμη με καλή προσέγγιση, δηλ. $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$ σε κάθε σημείο. Αν όμως αφήσουμε ένα κομμάτι ξύλο γρήγορα αντιλαμβανόμαστε, ότι έχει επιτάχυνση κατά την πτώση του. Αυτή οφείλεται στη βαρύτητα και στην περιγραφή *Euler* είναι η συνεισφορά του όρου μεταφοράς.

Για να απομυθοποιήσουμε την έννοια της υλικής παραγώγου θα δώσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Θεωρούμε την ομαλή περιστροφή ρευστού με γωνιακή ταχύτητα ω_0, για την οποία το πεδίο ταχύτητας σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι

$$\vec{u} = (0, u_\phi = \omega_0 r, 0)$$

Επειδή $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$, μόνο ο όρος μεταφοράς συνεισφέρει στην επιτάχυνση, και έχουμε

$$\vec{a} = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = (u_\phi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi})\vec{u} = u_\phi^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\hat{e}_\phi = -\omega_0^2 r \hat{e}_r.$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο διότι δεν είναι άλλο από την γνωστή μας κεντρομόλο επιτάχυνση. Πρέπει να σημειώσουμε ότι για μία μόνιμη ροή, όπως στο παράδειγμα μας, είναι ο όρος μεταφοράς που μας δίνει την επιτάχυνση.

Για το παράδειγμα αυτό θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και καρτεσιανές συντεταγμένες με

$$\vec{u} = (u_x = -\omega_0 y, u_y = \omega_0 x, 0).$$

Πάλι

$$\vec{a} = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = (-\omega_0 y \frac{\partial}{\partial x} + \omega_0 x \frac{\partial}{\partial y})\vec{u} = -\omega_0^2 (x, y, 0) = -\omega_0^2 r \hat{e}_r.$$

Η απλότητα του προηγούμενου παραδείγματος δεν φαίνεται αν αναπτύξουμε την γενική σχέση για την επιτάχυνση του ρευστού με πεδίο ταχύτητας $\vec{u}(\vec{r}, t) \equiv (u, v, w)$, σε καρτεσιανές συντεταγμένες με συνιστώσες

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{3.37}$$

Στην $x-$συνιστώσα της επιτάχυνσης συνεισφέρουν και οι τρείς βαθμίδες της $x-$συνιστώσας της ταχύτητας καθώς και οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητας. Έτσι, ενώ είναι εύκολο να υπολογίσουμε την επιτάχυνση από το πεδίο ταχύτητας, το αντίστροφο είναι δύσκολο. Και στην πραγματικότητα αυτή είναι η κατεύθυνση. Διότι απο τη γνώση των εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων έχουμε την επιτάχυνση. Ευτυχώς για μας σε πολλές περιπτώσεις δεν θα ακολουθήσουμε αυτή τη διαδικασία όταν το πρόβλημα έχει υψηλό βαθμό συμμετρίας και έχουμε ασυμπίεστη ροή. Εάν λόγω συμμετρίας μόνο μία συνιστώσα είναι διάφορος του μηδενός τότε μπορούμε να λύσουμε τη γραμμική εξίσωση για ασυμπίεστη ροή. Αυτό όμως προϋποθέτει ότι μπορούμε να δώσουμε και τις οριακές τιμές της ταχύτητας.

Ας δούμε λεπτομερέστερα τους επιμέρους όρους στις συνιστώσες της επιτάχυνσης. Στην $x-$συνιστώσα ο πρώτος όρος αντιστοιχεί σε μη μόνιμη ροή, ενώ ο δεύτερος απαιτεί βαθμίδα στην κατεύθυνση κίνησης και συνεισφέρει και σε μονοδιάστατη ροή στην $x-$κατεύθυνση, σε αντίθεση με τους άλλους δύο όρους οι οποίοι δεν συνεισφέρουν. Ο τρίτος όρος απαιτεί όχι μόνο $v-$συνιστώσα αλλά και εξάρτηση της u από το y, και τούτο διότι στον χρόνο dt η v-συνιστώσα μεταφέρει το σωματίδιο κατά μήκος του y και στην νέα θέση πιθανόν η u-συνιστώσα της ταχύτητας να είναι διαφορετική. Ο όρος αυτός δεν συνεισφέρει όταν είτε η v-συνιστώσα μηδενίζεται είτε όταν η u συνιστώσα δεν έχει βαθμίδα στην y-κατεύθυνση. Παρόμοια σχόλια ισχύουν και για τις άλλες συνιστώσες.

Παρόλη την πολυπλοκότητα για συμμετρικές ροές (που προϋποθέτουν συμμετρικές οριακές συνθήκες) έχουμε σημαντικές απλοποιήσεις. Π.χ. για την ροή $\vec{u} = (u(y), 0, 0)$ δεν έχουμε καθόλου επιτάχυνση σύμφωνα με τις (3.37). Αυτό είναι προφανές και από το διάγραμμα των γραμμών ροής (Σχ. 2.;), διότι οι τροχιές των ρευστών σωματιδίων, που συμπίπτουν με τις γραμμές ροής για μόνιμη ροή, είναι ευθύγραμμες στην $x-$κατεύθυνση και το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό για κάθε τροχιά. Έτσι παρόλο που έχουμε βαθμίδα $\frac{\partial u}{\partial y}$, δεν έχουμε v-συνιστώσα της ταχύτητας ώστε να έχουμε ανάμιξη μεταξύ των γραμμών ροής. Ταυτόχρονα αν μία συνιστώσα ταχύτητας μηδενίζεται παντού τότε δεν περιμένουμε και επιτάχυνση στην κατεύθυνση αυτή. Για το παράδειγμά μας δεν έχουμε επιτάχυνση και στις δύο άλλες κατευθύνσεις.

Για διδιάστατη μόνιμη ροή με $\vec{u} = (u(x,y), v(x,y), 0)$ έχουμε για τις συνιστώσες επιτάχυνσης

$$a_x = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$a_y = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y},$$

Αν το διδιάστατο πεδίο ροής έχει συνιστώσες $u(x),\ v(y)$,

$$a_x = u\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$a_y = v\frac{\partial v}{\partial y},$$

ενώ αν το πεδίο είναι $u(y),\ v(x)$

$$a_x = v\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$a_y = u\frac{\partial v}{\partial x},$$

Ο όρος $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ μας δίνει την μεταβολή του $\vec{u}$ στην κατεύθυνση του $\vec{u}$ και μηδενίζεται μόνο όταν δεν υπάρχει μεταβολή του $\vec{u}$ στην κατεύθυνση του $\vec{u}$. Αν όλα τα στοιχεία του ρευστού ακολουθούν ευθύγραμμη τροχιά τότε αυτός ο όρος στην επιτάχυνση μηδενίζεται. Επιτάχυνση έχουμε πάντα όταν οι γραμμές ροής αλλάζουν κατεύθυνση, ή αν το μέτρο της ταχύτητας κατά μήκος της γραμμής ροής αλλάζει ακόμη και όταν η ροική γραμμή είναι ευθεία. Η φυσική εικόνα αυτού του όρου φαίνεται πιό εύκολα σε δύο διαστάσεις αν πάμε σε καμπυλλόγραμμες συντεταγμένες. Σε κάθε σημείο μιας γραμμής ροής ορίζουμε δύο κάθετα μεταξύ τους μοναδιαία διανύσματα $\hat{e}_t$ και $\hat{e}_n$ τα οποία είναι αντίστοιχα εφαπτόμενα και κάθετα στην γραμμή ροής στό συγκεκριμένο σημείο. Θεωρούμε s την συντεταγμένη κατά μήκος της ροικής γραμμής, η οποία συνδέεται με τον χρόνο με $ds = vdt$ και $v(s) = |\vec{u}|$ το μέτρο της ταχύτητας κατά μήκος της ροικής γραμμής, δηλ. $\vec{u} = v\hat{e}_t$. Ο όρος

$$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = v\frac{d}{ds}\vec{u} = v\frac{dv}{ds}\hat{e}_t - \frac{v^2}{R}\hat{e}_n$$

όπου R εναι η ακτίνα καμπυλότητας της ροικής γραμμής στο σημείο. Ο πρώτος όρος είναι ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας με τον χρόνο (επιτρόχια επιτάχυνση),

$$\frac{\delta v}{\delta t} = \frac{\delta v}{\delta s}\frac{\delta s}{\delta t} = \frac{\delta v}{\delta s}v$$

Ο δεύτερος όρος είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση και συνδέεται με τη μεταβολή της κατεύθυνσης της ταχύτητας του σωματιδίου. Ο αναγνώστης εύκολα μπορεί να επεκτείνει το αποτέλεσμα αυτό σε τρείς διαστάσεις.

3.5.1 Επιτάχυνση σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.

Για να υπολογίσουμε την επιτάχυνση σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες πρέπει να θυμόμαστε δύο πράγματα. Το πρώτο ότι τα ορθογώνια διανύσματα βάσης μεταβάλλονται στο χώρο (κυρίως με τις γωνιακές μετατοπίσεις) σε αντίθεση με τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα στο καρτεσιανό σύστημα. Το δεύτερο είναι πρακτική συμβουλή στον υπολογισμό της υλικής παραγώγου $\frac{D}{Dt}$.

Οταν το $\frac{D}{Dt}$ δρα σε μια βαθμωτή ποσότητα $\Phi(\vec{r})$, τότε στο $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\Phi$ πρώτα υπολογίζουμε το $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})$ για να εκμεταλευτούμε την συμμετρία ροής όπου τουλάχιστον μία συνιστώσα ταχύτητας μηδενίζεται και στη συνέχεια υπολογίζουμε το $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\Phi$, ενώ και το αντίστροφο είναι δυνατό. Εάν όμως το $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})$ δρά σε διάνυσμα, τότε η ΄ύπαρξη της παρένθεσης υποδεικνύει την σειρά στην πράξη $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$, καθόσον ο ορισμός του $\vec{\nabla}\vec{u}$ δεν γίνεται με διανυσματικές πράξεις που είμαστε εξοικιωμένοι. Σε εφαρμοσμένες επιστήμες αυτό επιτυγχάνεται με την εισαγωγή των δυαδικών, π.χ. $\hat{i}\hat{i}$, $\hat{i}\hat{j}\cdots$,, δηλ γενικευμένων γινομένων διανυσμάτων. Εδώ θα αποφύγουμε αυτό τον συμβολισμό.

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες με $\vec{u}\equiv(u_r,u_\phi,u_z)$, η επιτάχυνση έχει συνιστώσες

$$a_r=\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\phi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \phi}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{u_\phi^2}{r},$$

$$a_\phi=\frac{\partial u_\phi}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\phi}{\partial r}+\frac{u_\phi}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}+u_z\frac{\partial u_\phi}{\partial z}+\frac{u_r u_\phi}{r},$$

$$a_z=\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\phi}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \phi}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}. \tag{3.38}$$

Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν αν θεωρήσουμε τον τελεστή της κλίσης σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\vec{\nabla}=\hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\hat{e}_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}+\hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}, \tag{3.39}$$

και αντικαταστήσουμε στον όρο της μεταφοράς για την επιτάχυνση, αφού πάρουμε υπόψη μας ότι τα μοναδιαία διανύσματα βάσης, εν γένει μεταβάλλονται στο χώρο ως προς την κατεύθυνση τους. Έτσι θα χρειαστούμε τις σχέσεις

$$\frac{\partial}{\partial r}\hat{e}_r=\frac{\partial}{\partial r}\hat{e}_\phi=\frac{\partial}{\partial z}\hat{e}_z=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi}\hat{e}_r=\hat{e}_\phi,\quad \frac{\partial}{\partial \phi}\hat{e}_\phi=-\hat{e}_r. \tag{3.40}$$

Ο όρος $-\frac{u_\phi^2}{r}$ προέρχεται από τον όρο $u_\phi\frac{1}{r}u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\left(u_\phi\hat{e}_\phi\right)$ με παραγώγιση στο μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{e}_\phi$, δηλ.

$$u_\phi\frac{1}{r}u_\phi\frac{\partial}{\partial \phi}\hat{e}_\phi=-\frac{1}{r}u_\phi^2\hat{e}_r. \tag{3.41}$$

Οι παραπάνω σχέσεις σε απλές ροές μας δίνουν γνωστά και κατανοητά αποτελέσματα. Εάν π.χ. η ροή είναι μόνιμη και διδιάστατη ($\frac{\partial}{\partial z}=0$), και έχουμε μόνο u_ϕ συνιστώσα, δηλ. κυκλική ροή, τότε οι κυλινδρικές συνιστώσες της επιτάχυνσης δίνονται από τις σχέσεις

$$a_r=-\frac{u_\phi^2}{r},$$

$$a_\phi=\frac{u_\phi}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}\equiv\frac{1}{2}\frac{\partial u_\phi^2}{\partial s}, \tag{3.42}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $ds = rd\phi$, καθόσον $rd\phi$ είναι μήκος εφαπτόμενο της τροχιάς. Οι σχέσεις αυτές μας δίνουν την κεντρομόλο και επικαμπύλια επιτάχυνση αντίστοιχα για κυκλική κίνηση του υγρού σωματιδίου.

Εάν η ροή μας είναι καθαρά ακτινική ($\vec{u} = (u_r, 0, 0)$) και μόνιμη, τότε έχουμε μόνο ακτινική συνιστώσα της επιτάχυνσης με

$$a_r = u_r \frac{\partial u_r}{\partial r}.$$

Για πληρότητα θα παραθέσουμε και τις συνιστώσες της επιτάχυνσης σε σφαιρικές συντεταγμένες.

$$a_r = \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_\phi \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r},$$

$$a_\theta = \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\phi \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\phi^2 \cot\theta}{r},$$

$$a_\phi = \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + u_\phi \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\phi}{r} + \frac{u_\theta u_\phi}{r}\cot\theta. \tag{3.43}$$

Οι όροι που δεν έχουν παραγώγους των συνιστωσών της ταχύτητας προέρχονται από μεταβολή των μοναδιαίων διανυσμάτων βάσης. Π.χ. ο όρος της ακτινικής επιτάχυνσης μπορεί να γραφεί και

$$a_r = \frac{\partial u_r}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_r - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r},$$

όπου οι δύο τελευταίοι όροι προέρχονται από τη μεταβολή των μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{e}_\theta$ ως πρός θ και ο δεύτερος από ένα όρο της μεταβολής του $\hat{e}_\phi$ ως προς ϕ. Για τους υπόλοιπους όρους ισχύουν παρόμοια αρκεί να θυμόμαστε ότι τα μοναδιαία διανύσματα δεν μεταβάλλονται με τό r. Προς διευκόλυνση δίνονται και οι μεταβολές

$$\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} = \hat{e}_\theta$$

$$\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \phi} = \sin\theta \hat{e}_\phi$$

$$\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{e}_r$$

$$\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \phi} = \cos\theta \hat{e}_\phi$$

$$\frac{\partial \hat{e}_\phi}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{e}_\phi}{\partial \phi} = -\sin\theta \hat{e}_r - \cos\theta \hat{e}_\theta.$$

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι για ακτινική ροή $u_r(r)$ έχουμε μόνο ακτινική επιτάχυνση με

$$a_r = \frac{\partial}{\partial r} \frac{u_r^2}{2}.$$

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση με μόνη συνιστώσα την $u_\phi(\theta)$. Μία τέτοια ροή μπορεί να προέρχεται από την περιστροφή μιας πεπερασμένης ράβδου με μηδενική ταχύτητα στα άκρα της ράβδου.

Επιπλέον δηλ. έχουμε $u_\phi(0) = u_\phi(\pi) = 0$. Οι συνιστώσες της επιτάχυνσης στην περίπτωση αυτή είναι

$$a_r = -\frac{u_\phi^2}{r},$$

$$a_\theta = -\frac{u_\phi^2 \cot\theta}{r},$$

$$a_\phi = u_\phi \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}. \tag{3.44}$$

Να τονίσουμε ότι αν και οι συνιστώσες της επιτάχυνσης διαφέρουν ανάλογα με το σύστημα αναφοράς, η επιτάχυνση είναι ίδια. Επίσης η επιτάχυνση του ρευστού σωματιδίου πρέπει να έχει την ίδια τιμή σε κάθε αδρανειακό σύστημα, που κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{c}$, δηλ. να είναι αμετάβλητη στον μετασχηματισμό Γαλιλαίου

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{c}t, \quad \vec{u}' = \vec{u} - \vec{c},$$

όπου στο νέο σύστημα το πεδίο ταχύτητας είναι $\vec{u}'(\vec{x}', t)$. Για την επιτάχυνση στο νέο αδρανειακό σύστημα έχουμε

$$\frac{D'\vec{u}'}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t}|_{\vec{x}'} + (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}')\vec{u}' = \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t}|_{\vec{x}'} + [(\vec{u} - \vec{c}) \cdot \vec{\nabla}]\vec{u} \tag{3.45}$$

$$= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + [\frac{\partial \vec{x}'}{\partial t} \cdot \vec{\nabla}]\vec{u} + [(\vec{u} - \vec{c}) \cdot \vec{\nabla}]\vec{u} \tag{3.46}$$

$$= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - [\vec{c} \cdot \vec{\nabla}]\vec{u} + [(\vec{u} - \vec{c}) \cdot \vec{\nabla}]\vec{u} \tag{3.47}$$

$$= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \equiv \frac{D\vec{u}}{Dt} \tag{3.48}$$

3.5.2 Περιορισμοι στο πεδίο ταχύτητας και επιτάχυνση για ασυμπίεστη ροή

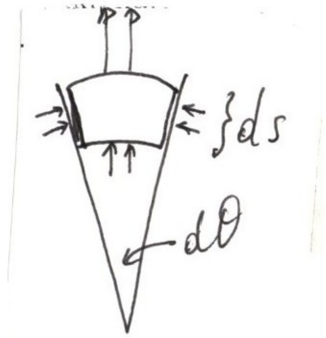
Στην προηγούμενη συζήτηση για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης κάναμε δύο σημαντικές παραλείψεις. Η πρώτη είναι ότι δεν είπαμε τίποτε για τα αίτια που δημιουργούν αυτή την επιτάχυνση, δηλ. με άλλα λόγια δεν είπαμε για τις δυνάμεις που δημιούργησαν και διατηρούν το πεδίο ταχύτητας. Αυτό αποτελεί το αντικείμενο της αρχής της διατήρησης της ορμής που θα διερευνηθεί στο επόμενο κεφάλαιο. Η δεύτερη παράλειψη είναι ότι δεν διερευνήσαμε τι περιορισμούς βάζει στο πεδίο ταχύτητας και επομένως και στην επιτάχυνση, η αρχή της συνέχειας της μάζας, που για ασυμπίεστα ρευστά εκφράζεται με τον μηδενισμό της απόκλισης του πεδίου ταχύτητας, δηλ. $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$.

Για το παράδειγμα της κυκλικής ροής έχουμε

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} u_\phi = 0.$$

Η εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας δεν μπορεί να εξαρτάται από τη γωνία περιστροφής ϕ, εκτός αν επιτρέψουμε και μία μικρή ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας. Από την συνέχεια της μάζας δεν προκύπτει περιορισμός για την εξάρτηση της $u_\phi(r)$ από την ακτίνα r. Αυτό θα προσδιοριστει από τις εξισώσεις κίνησης που θα δόσουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Ηδη όμως από τον περιορισμό της εξίσωσης συνέχειας και την (3.38) βέπουμε ότι τα σωματίδια ρευστού έχουν μόνο ακτινική επιτάχυνση

$$a_r = -\frac{u_\phi^2}{r}$$



Σχήμα 3.6: Σχ. 3.6 Στοιχείο επιφάνειας για την εξίσωση συνέχειας για διδιάστατη ροή.

και επομένως και οι δυνάμεις που ασκούνται στα σωματίδια έχουν ακτινική συνιστώσα μόνον και μάλιστα προς τον άξονα, με εξάρτηση μόνο από την ακτίνα r.

Αντίστοιχα για την ακτινική κυλινδρική ροή με $u_r(r)$, έχουμε

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) = 0$$

μόνο αν $u_r \sim \frac{1}{r}$, και αυτό είναι αναμενόμενο ώστε να διατηρείται σταθερή η ροή μάζας δια μέσω κυλίνδρων αυξανόμενης ακτίνας r. Έτσι, ενώ το πεδίο ταχύτητας πέφτει σαν $\frac{1}{r}$, και η επιφάνεια του κυλίνδρου αυξάνει ανάλογα του r, ο ρυθμός ροής μάζας διατηρείται σταθερός. Πάλι η επιτάχυνση είναι ακτινικά και πρός τον άξονα με

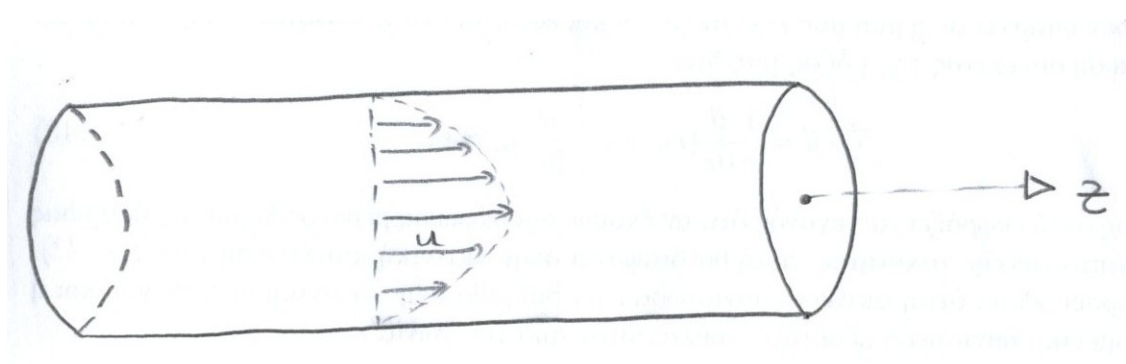
$$a_r = u_r\frac{\partial u_r}{\partial r},$$

ανεξάρτητα από το πρόσημο της ταχύτητας. Ομοίως και η δύναμη στο σωματίδιο είναι στην ίδια κατεύθυνση.

Στα προηγούμενα παραδείγματα ροής μόνο με ακτινική επιτάχυνση, είδαμε ότι υπάρχουν σημαντικοί περιορισμοι στο πεδίο ταχύτητας λόγω της εξίσωσης συνέχειας. Είτε αναφερόμαστε για κυκλική ροή (εφαπτομενική ταχύτητα) είτε για ακτινική ροή (ακτινική ταχύτητα) έχουμε μόνο εξάρτηση από την ακτίνα r και όχι από την γωνία ϕ. Ο περιορισμός αυτός δεν υπάρχει αν η ροή μας έχει ακτινική και εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας. Η εξίσωση συνέχειας της μάζας μας δίνει

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}u_\phi = 0. \tag{3.49}$$

Η σχέση αυτή εκφράζει το γεγονός ότι, αν έχουμε συσσώρευση ρευστού λόγω της βαθμίδας της εφαπτομενικής ταχύτητας, αυτή θα διαφύγει στην ακτινική κατεύθυνση (δες Σχ. 3.6). Αυτό προυποθέτει ότι η ακτινική συνιστώσα έχει βαθμίδα στην ακτινική κατεύθυνση και η εφαπτομενική συνιστώσα εξαρτάται τουλάχιστον απο την γωνία ϕ. Μάλιστα εύκολα διαπιστώνουμε ότι η περίπτωση $u_r(r)$, $u_\phi(\phi)$ δεν είναι συμβατή με την εξίσωση συνέχειας. Εδώ και οι δύο συνιστώσες πρέπει να εξαρτώνται και από τις δύο συντεταγμένες. Ετσι αν θεωρήσουμε ότι η γωνιακή εξάρτηση της u_ϕ είναι της μορφής $\sim \sin m\phi$, όπου m είναι ακέραιος αριθμός ώστε να είναι περιοδική ως προς ϕ για μόνιμη ροή, τότε η $u_r \sim \cos m\phi$ από την εξίσωση συνέχειας, η οποία επιπλέον μας δίνει και μια σχέση για την ακτινική εξάρτηση μεταξύ των δύο συνιστωσών. Αν όμως εξετάσουμε την επιτάχυνση θα δούμε ότι αυτή θα έχει όρους με $\sin 2m\phi$ κτλ. Ομοίως και η δύναμη θα έχει παρόμοιες εξαρτήσεις και θα είναι δύσκολο να ικανοποιηθεί.



Σχήμα 3.7: Σχ. 3.7 Ροή σε κυλινδρικό σωλήνα.

Για να δούμε ότι η εξίσωση συνέχειας είναι πολύ χρησιμη για την λύση προβλημάτων ροής, ιδιαίτερα όταν δεν έχουμε ιξώδες και έχουμε ¨συμμετρική' ροή θα δώσουμε το παράδειγμα της ροής μέσα σε ένα οριζόντιο κυλινδρικό σωλήνα χωρίς βαρύτητα (δες Σχ.3.7). Στην περίπτωση αυτή για ασυμπίεστο ρευστό έχουμε σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} u_\phi + \frac{\partial}{\partial z} u_z = 0.$$

Ελλείψει βαρύτητας[13] μπορούμε να υποθέσουμε ότι το πεδίο ροής έχει μόνο u_z συνιστώσα. Εδώ φυσικά χωράει πολύ συζήτηση διότι υποθέτουμε ότι η ροή μας είναι σε στρώματα και δεν έχουμε ανάμιξη λόγω τύρβης. Μπορούμε να δεχθούμε ότι αυτό είναι δυνατό για μέτριες ταχύτητες και αργότερα θα δώσουμε και ποσοτικούς περιορισμούς[14]. Τότε η αρχή της συνέχειας μας δίνει $\frac{\partial}{\partial z} u_z = 0$, δηλ. η ταχύτητα είναι ανεξάρτητη της $z-$συνιστώσας. Η επόμενη λογική υπόθεση είναι ότι έχουμε και κυλινδρική συμμετρία, δηλ. λόγω έλλειψης βαρύτητας έχουμε ανεξαρτησία από τη γωνία ϕ, και η z- συνιστώσα της ταχύτητας είναι μόνο συνάρτηση του r και του χρόνου t, ώστε $u_z(r,t)$. Αν η διαφορά πίεσης στα δύο άκρα είναι ανεξάρτητη του χρόνου, τότε και η ροή είναι μόνιμη και έχουμε μόνο $u_z(r)$ και η δουλειά μας έχει γίνει πολύ πιο εύκολη. Για να βρούμε την εξάρτηση απο την ακτίνα πρέπει να γνωρίζουμε την βαθμίδα πίεσης και θα πρέπει να καταφύγουμε στην εξίσωση διατήρησης της ορμής που είναι το αντικείμενο του επόμενου κεφαλαίου.

Παράδειγμα Αξοσυμμετρικής ροής:Ας θεωρήσουμε την τριδιάστατη αξοσυμμετρική ροή με συνιστώσες, ταχύτητας

$$\vec{u}(r,\theta) = \{u_r(r,\theta), 0, u_\theta(r,\theta)\},$$

όπου η κίνηση των σωματιδίων γίνεται σε ένα επίπεδο που διέρχεται από τον z-άξονα. Ετσι δεν έχουμε u_ϕ συνιστώσα ούτε εξάρτηση από τη γωνία ϕ. Εάν γνωρίζουμε μία συνιστώσα της ταχύτητας για ασυμπίεστη ροή, μπορούμε να βρούμε την άλλη, χρησιμοποιόντας την εξίσωση

[13] Για συνήθεις ροές μπορούμε να παραλείψουμε τη δύναμη της βαρύτητας σε υγρά σε σχέση με τη δύναμη λόγω πίεσης ή άλλων δυνάμεων. Το κριτήριο για να το κάνουμε δίνεται στο Κεφ 4 όπου θα ορ"ισουμε και τον αντίστοιχο αδιάστατο αριθμό. Ετσι θεωρούμε την ιδανική περίπτωση όπου έχουμε μόνο οριζόντια συνιστώσα ταχύτητας. Φυσικά μιά τέτοια προσέγγιση δεν μπορεί να ισχύσει όταν το ρευστό είναι ο αέρας, εκτός αν περάσει ανεμοστρόβιλος9 δες Κεφ. 7).

[14] Υπάρχει και πάνω και κάτω όριο στην ταχύτητα. Το πάνω όριο είναι για να αποφύγουμε φαινόμενα τύρβης και το κριτήριο είναι ο αριθμός Ρεψνολδς που είναι ανάλογος της ταχύτητας (δες παράγραφο ;;). Ταυτόχρονα δεν μπορεί να είναι και πολύ χαμηλή διότι τα φαινόμενα τριβής καθώς και βαρύτητας υπεισέρχονται.

συνέχειας. Εστω π.χ. ότι γνωρίζουμε την ακτινική συνιστώσα

$$u_r(r,\theta) = \frac{\mu \cos\theta}{r^3},$$

όπου μ είναι μία σταθερά. Από τον μηδενισμό της απόκλισης του πεδίου ταχύτητας έχουμε, σε σφαιρικές συντεταγμένες, για την $u_\theta(r,\theta)$ συνιστώσα

$$\frac{1}{r^2}\left(-\frac{\mu}{r^2}\cos\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(u_\theta \sin\theta\right)$$

και ολοκληρόνοντας ως πρός θ

$$u_\theta = \frac{\mu \sin\theta}{r^3} + f(r)$$

όπου $f(r)$ είναι μιά αυθαίρετη συνάρτηση, που μπορούμε να την προσδιορίσουμε άν γνωρίζουμε καποιες οριακές συνθήκες για το πεδίο ταχύτητας. Ετσι το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις η πιό απλή από τις οποίες είναι για $f(r) = 0$.

Για να έχουμε περισσότερες πληροφορίες για τη ροή και το φυσικό νόημα της σταθεράς μ θα υπολογίσουμε την κυκλοφορία για μία κυκλική καμπύλη C στο επίπεδο $x - z$(δες Σχ. ;;;;). Μόνο η u_θ συνιστώσα συνεισφέρει στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_C \vec{u}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} d\theta r u_\theta(r,\theta) = \frac{\mu}{r^2}\int_0^{2\pi} d\theta \sin\theta) = 0,$$

που σημαίνει ότι η μέση τιμή του στροβιλισμού πάνω στην επιφάνεια που περικλείεται από την καμπύλη C μηδενίζεται. Αω υπολογίσουμε τώρα τη ροή μέσω μιας σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας r. Εύκολα δείχνει κανείς ότι και στην περίπτωση αυτή το αποτέλεσμα είναι μηδέν για κάθε ακτίνα, όπως αναμένεται από τον μηδενισμό της απόκλισης του πεδίου ταχύτητας. Το γεγονός ότι η ταχύτητα έχει και γωνιακή εξάρτηση σημαίνει ότι δεν έχουμε να κάνουμε με μία σημειακή πηγή αν και οποιαδήποτε πηγή είναι εντοπισμένη στο σημείο $r = 0$. Στο Κεφ 5.5 θα δούμε ότι η πηγή είναι ένα σημειακό δίπολο ροής.

3.6 Διαχωρισμός επιτάχυνσης λόγω στροβιλισμού

Είδαμε στα προηγούμενα ότι η απόκλιση του πεδίου ταχύτητας $\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$ συνδέεται με τη μεταβολή όγκου του ρευστού και επομένως με τη συμπιεστότητα στη ροή ενός ρευστού. Ο στροβιλισμός του πεδίου ταχύτητας $\vec{\nabla}\times\vec{u}$ είναι εξ' ίσου σημαντικός για δύο λόγους: (α) Μαζί με την απόκλιση (και υπό ορισμένες οριακές συνθήκες) καθορίζουν πλήρως το πεδίο ταχύτητας, και μπορούμε να πούμε ότι είναι οι ¨πηγές' του πεδίου ταχύτητας εάν δεν πάρουμε υπόψη τις οριακές συνθήκες. (β) Ο στροβιλισμός του πεδίου μας δίνει επίσης πληροφορίες για την ύπαρξη στροβίλων και γενικότερα μας λέει αν τα ¨σωματίδια' του ρευστού καθώς κινούνται στις τροχιές τους (οι οποίες δεν είναι απαραίτητο να είναι καμπυλόγραμες για να έχουμε στροβιλισμό), περιστρέφονται επίσης γύρω από τον άξονα τους[15]. Για τους παραπάνω λόγους θα προσπαθήσουμε να γράψουμε την επιτάχυνση με διαφορετική σχέση, ώστε να απομονώσουμε τον όρο που περιέχει στροβιλισμό.

Ο δεύτερος όρος στην (3.35) μπορεί να αναπτυχθεί ως εξής:

$$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\cdot\vec{u} \;=\; \vec{u}\cdot\left(\sum_i \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\vec{u} \;=\; \sum_i (\vec{u}\cdot\hat{e}_i)\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}, \tag{3.50}$$

[15] Δες Κεφ.

όπου x_i για $i = 1, 2, 3$ είναι οι συνιστώσες x, y και z αντίστοιχα και $\hat{e}_i$ για $i = 1, 2, 3$ τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$. Χρησιμοποιώντας από το ανάπτυγμα του τριπλού εξωτερικού γινομένου την ιδιότητα :

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

έχουμε για κάθε όρο του αθροίσματος στο δεξιό μέρος της (3.50)

$$\begin{aligned}(\vec{u} \cdot \hat{e}_i)\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} &= (\vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i})\hat{e}_i - \vec{u} \times (e_i \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{1}{2}u^2)\hat{e}_i - \vec{u} \times (\hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}) \times \vec{u}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Έτσι, ο όρος μεταφοράς της επιτάχυνσης γίνεται

$$\begin{aligned}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{1}{2} \cdot u^2)\hat{e}_i - \vec{u} \times (\sum_i \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}) \times \vec{u} \\ &= \vec{\nabla}(\frac{1}{2}u^2) - \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}), \end{aligned} \tag{3.52}$$

και η στιγμιαία επιτάχυνση γράφεται ως:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla}(\frac{1}{2}u^2) - \vec{u} \times \vec{\zeta}. \tag{3.53}$$

επιτάχυνση σωματιδίου	=	τοπική επιτάχυνση	+	τροχιακή επιτάχυνση	+	επιτάχυνση περιστροφής,

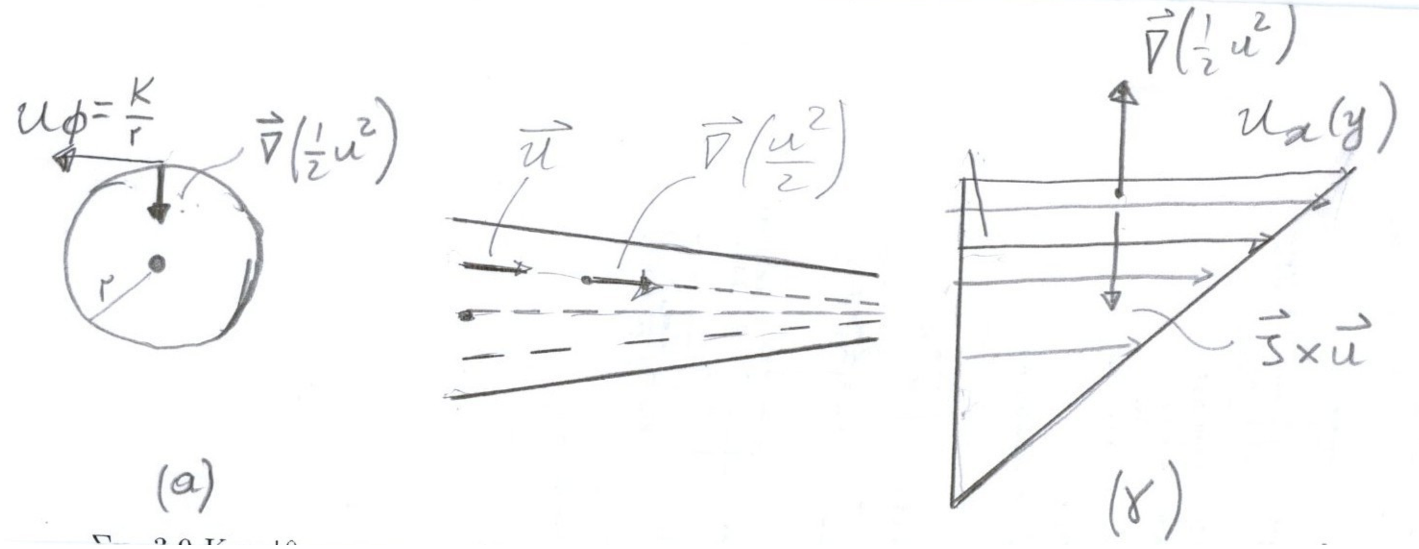
όπου

$$\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{u}. \tag{3.54}$$

Η διανυσματική συνάρτηση $\vec{\zeta} = \vec{\zeta}(x, y, z, t)$ ονομάζεται διάνυσμα στροβιλισμού. Θα δούμε αργότερα ότι ένα τέτοιο διάνυσμα, όποτε υπάρχει, συνδέεται συνήθως (αλλά όχι πάντα) με περιστροφή του υγρού. Για να ακριβολογούμε συνδέεται με την περιστροφή ενός ρευστού σωματιδίου γύρω από τον άξονά του καθώς το σωματίδιο κινείται κατά μήκος της τροχιάς του[16]. Κατά κάποιο τρόπο ο τελευταίος όρος είναι η επιτάχυνση καθώς τα ρευστά σωματίδια περιστρέφονται περί το κέντρο μάζας του σωματιδίου, ενώ ταυτόχρονα κινούνται κατά μήκος των γραμμών ροής. Ο δεύτερος όρος της βαθμίδας της κινητικής ενέργειας μας δίνει την επιτάχυνση λόγω της μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας καθώς κινείται κατά μήκος της γραμμής ροής. Η κατεύθυνσή του είναι κάθετη στις καμπύλες σταθερού μέτρου της ταχύτητας και μάλιστα στην κατεύθυνση αύξησης. Έτσι για κυκλική ροή με $u_\phi(r)$, ο όρος αυτός έχει ακτινική κατεύθυνση και αν είναι προς το κέντρο η προς τα έξω, εξαρτάται από την ακτινική εξάρτηση. Αν έχουμε ροή σε συγκλίνον κυλινδρικό σωλήνα στην $+z$-κατεύθυνση τότε κατά μήκος του άξονα ο όρος αυτός είναι επίσης στην $+z$ κατεύθυνση. Όταν όμως απομακρυνόμαστε προς το κυλινδρικό τοίχωμα τότε ανάλογα με την μεταβολή της διατομής μπορεί να έχουμε και μία συνιστώσα κάθετη και προς τον z-άξονα.

Η σύγκριση της (3.52) με την (3.37) όταν αναπτύξουμε σε συνιστώσες είναι χρήσιμη. Εδώ απλώς να παρατηρήσουμε ότι η νέα μορφή εγινε με κάποια αναδιάταξη των όρων. Π.χ. η συνεισφορά του όπου $\vec{\nabla}(\frac{u^2}{2})$ είναι

$$\vec{\nabla}(\frac{u^2}{2}) = +u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x}.$$



Σχήμα 3.8: Σχ. 3.8 Κατεύθυνση της επιτάχυνσης λόγω βαθμίδας του μέτρου ταχύτητας για (α) ομαλή κυκλική ροή και ευθύγραμμη ροή σε (β) συγκλίνον κυλινδρικό σωλήνα και (γ) με κάθετη βαθμίδα .

Από τους τρείς όρους μόνο ο πρώτος υπάρχει άμεσα στην (3.37) ενώ οι άλλοι δύο προσθαφαιρούνται ώστε το υπόλοιπο να μας δώσει τον όρο με τον στροβιλισμό, δηλ. την $x-$συνιστώσα του $-\vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})$.

Ο παραπάνω διαχωρισμός είναι χρήσιμος, αλλά θα ήταν σφάλμα να συμπεράνουμε ότι ο όρος της περιστροφής τείνει να συνεισφέρει σημαντικά σε περιστροφική ροή, ενώ ο όρος της κινητικής ενέργειας είναι πιο σημαντικός σε ευθύγραμμη ροή. Π.χ. για την ευθύγραμμη ροή με $\vec{u} = (ay, 0, 0), \quad a =$ σταθερά , η συνεισφορά από τον όρο της περιστροφής είναι ίση με

$$\vec{\zeta} \times \vec{u} = -\frac{\partial u}{\partial y}\hat{k} \times u\hat{i} = -a^2 y\hat{j}$$

και είναι αντίθετη αυτής τού όρου της κινητικής ενέργειας,

$$\vec{\nabla}(\frac{1}{2}u^2) = a^2 y\hat{j}.$$

Έτσι συνολικά η συνεισφορά των δύο όρων είναι μηδέν όπως αναμένεται διότι $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = 0$.

Για την κυλινδρική ακτινική ροή με $\vec{u} = (\frac{b}{r}, 0, 0), \quad b =$ σταθερά, έχουμε $\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$. Αρα μόνο ο όρος της κινητικής ενέργειας συνεισφέρει $-b^2 \frac{1}{r^3}\hat{e}_r$ και η επιτάχυνση είναι προς τον άξονα του κυλίνδρου.

Ας εξετάσουμε τώρα δύο περιπτώσεις περιστροφικής ροής. Για την περιστροφή με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{u} = (0, u_\phi = \omega_0 r, 0)$, ο όρος της κινητικής ενέργειας μας δίνει

$$\frac{d}{dr}\frac{u_\phi^2}{2} = \omega_0^2 r\hat{e}_r.$$

Ο όρος λόγω περιστροφής είναι

$$\vec{\zeta} \times \vec{u} = (-2\omega_0 \hat{e}_z) \times (\omega_0 r\hat{e}_\phi) = -2\omega_0^2 r\hat{e}_r,$$

[16] Δες 17

που είναι διπλάσιος αλλά στην αντίθετη κατεύθυνση, έτσι ώστε το άθροισμα μας δίνει την γνωστή κεντρομόλο επιτάχυνση. Έαν η ταχύτητα έχει $u_\phi = \frac{K}{r}, K =$ σταθερά , τότε ο όρος περιστροφής δεν συνεισφέρει, λόγω μηδενισμού της στροφορμής, και η κεντρομόλος επιτάχυνση προέρχεται από τη βαθμίδα της κινητικής ενέργειας. Τα παραπάνω αποτελέσματα συνοψίζονται στον πίνακα 3.1.

Πίνακας 3.1 Συνεισφορά στην επιτάχυνση των όρων στροφορμής και βαθμίδας κινητικής ενέργειας.

Ροή	ταχύτητα	$\vec{\nabla}\times\vec{u}$	$\vec{\zeta}\times\vec{u}$	$\vec{\nabla}(\frac{1}{2}u^2)$	επιτάχυνση
Ευθύγραμμη	$\vec{u} = (u_0 y, 0, 0)$	$-u_0\hat{k}$	$-u_0^2 y\hat{j}$	$u_0^2 y\hat{j}$	0
ακτινική κυλινδρική	$\vec{u} = (\frac{Q}{2\pi r}, 0, 0)$	0	0	$-(\frac{Q}{2\pi})^2\frac{1}{r^3}\hat{e}_r$	$-(\frac{Q}{2\pi})^2\frac{1}{r^3}\hat{e}_r$
περιστροφή κυλινδρική	$u_\phi = \omega_0 r$	$-2\omega_0\hat{e}_z$	$-2\omega_0^2 r\hat{e}_r$	$\omega_0^2 r\hat{e}_r$	$-\omega_0^2 r\hat{e}_r$
στρόβιλος ελεύθερος	$u_\phi = \frac{K}{r}$	0	0	$K^2\frac{1}{r^3}\hat{e}_r$	$K^2\frac{1}{r^3}\hat{e}_r$

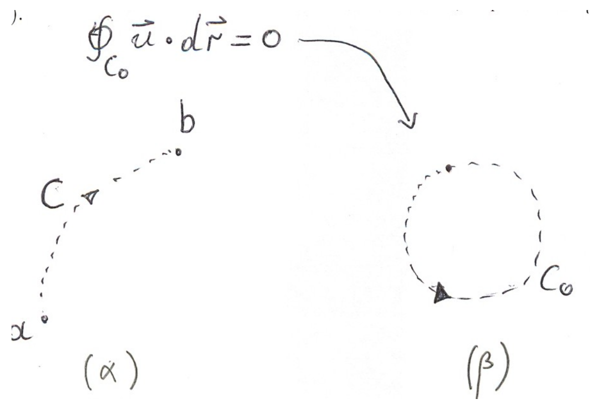
3.7 Αστρόβιλο Πεδίο Ταχύτητας

Από τον ορισμό του στροβιλισμού $\vec{\zeta}(\vec{r}, t)$, είναι προφανές ότι αποτελεί ένα διανυσματικό πεδίο και όπως για κάθε πεδίο μπορούμε να ορίσουμε γραμμές στροβιλισμού που όπως και οι γραμμές ροής είναι εφαπτόμενες στο διάνυσμα του στροβιλισμού σε κάθε σημείο. Οι υπόλοιπες ιδιότητες για την πυκνότητα των γραμμων ισχύουν κατ΄ αναλογία. Δυστυχώς εν γένει η οπτική απεικόνιση του πεδίου στροβιλισμού (εκτός από ειδικές περιπτώσεις δεν μας δίνει και την απεικόνηση του πεδίου ταχύτητας. Και τούτο διότι το πεδίο ταχύτητας καθορίζεται όχι μόνο από τον στροβιλισμό του αλλά και την απόκλισή του. Για την περίπτωση που η ροή είναι ασυμπίεστη έχουμε μηδενισμό της απόκλισης και η ταχύτητα ορίζεται από τον στροβιλισμό του. Αυτό δεν φαίνεται ιδιαίτερα χρήσιμο διότι στον ορισμό τού στροβιλισμού μπαίνει η ταχύτητα. Εν τούτοις είναι δυνατόν να μετρήσουμε πειραματικά τον στροβιλισμό του πεδίου ταχύτητας, ενώ για χαρακτηριστικές πηγές του πεδίου ταχύτητας ο στροβιλισμός είναι γνωστός. Αφήνουμε για το Κεφ. 7 το πρόβλημα υπολογισμού της ταχύτητας απο το στροβιλισμό του για ασυμπίεστη ροή. Εδώ αρκεί να αναφέρουμε ότι το πρόβλημα είναι απολύτως ανάλογο με αυτό του μαγνητικού πεδίου ανεξάρτητου του χρόνου λόγω κατανομής ρεύματος. Για την περίπτωση αυτή η εξίσωση $Maxwell$ μας δίνει

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = ??\vec{J}$$

Για τό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ έχουμε πάντα $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$, ενώ ο στροβιλισμός του ορίζεται από την κατανομή ρεύματος.

Αν ο στροβιλισμός του πεδίου ταχύτητας $\vec{u}(\vec{r}, t)$ μηδενίζεται δηλ. αν $\vec{\zeta} = \vec{\nabla}\times\vec{u} = 0$ τότε λέμε ότι το πεδίο είναι *αστρόβιλο* η *διατηρητικό*. Το πεδίο θεωρείται διατηρητικό αν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του πεδίου κατά μήκος της μετακίνησης (ιδεατής) ενός ρευστού σωματιδίου από ένα σημείο σε ένα άλλο σημείο δεν εξαρτάται από την διαδρομή αλλά από τα δύο σημεία μόνο. Τέτοια



Σχήμα 3.9: Σχ. 3.9 Για αστρόβιλη ροή η κυκλοφορία μηδενίζεται για την κλειστή διαδρομή C, αλλά είναι ανεξάρτητη της διαδρομής που έχει τα ίδια άκρα.

παραδείγματα είναι το βαρυτικό πεδίο της δύναμης έλξης από τη Γή ή η δύναμη *Coulomb* ανάμεσα σε δύο ηλεκτρικά φορτία και στην περίπτωση αυτή το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της δύναμης είναι τό έργο, έτσι ώστε αν τα δύο σημεία συμπίπτουν τότε το συνολικό έργο μηδενίζεται. Στην περίπτωση του πεδίου ταχύτητας η αντίστοιχη ποσότητα για μία κλειστή διαδρομή C είναι η ***κυκλοφορία*** K_C

$$K_C = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l} \qquad \text{κυκλοφορία.} \tag{3.55}$$

Από το θεώρημα *Stokes* έχουμε

$$\oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{\zeta} \cdot d\vec{S} \tag{3.56}$$

όπου S είναι μια επιφάνεια που περικλείεται από την κλειστή καμπύλη C. Το δεξιό μέρος μηδενίζεται για αστρόβιλη ροή, και επομένως και η κυκλοφορία για οποιαδήποτε διαδρομή μηδενίζεται. Όπως και στην περίπτωση του έργου και εδώ η κυκλοφορία για μια ανοικτή διαδρομή εξαρτάται μόνο από τά άκρα και όχι από την διαδρομή (δες Σχ. 3.9). Και στην περίπτωση της αστρόβιλης ροής μπορούμε να ορίσουμε μία νέα βαθμωτή συνάρτηση $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$ που ορίζει την ταχύτητα ως :

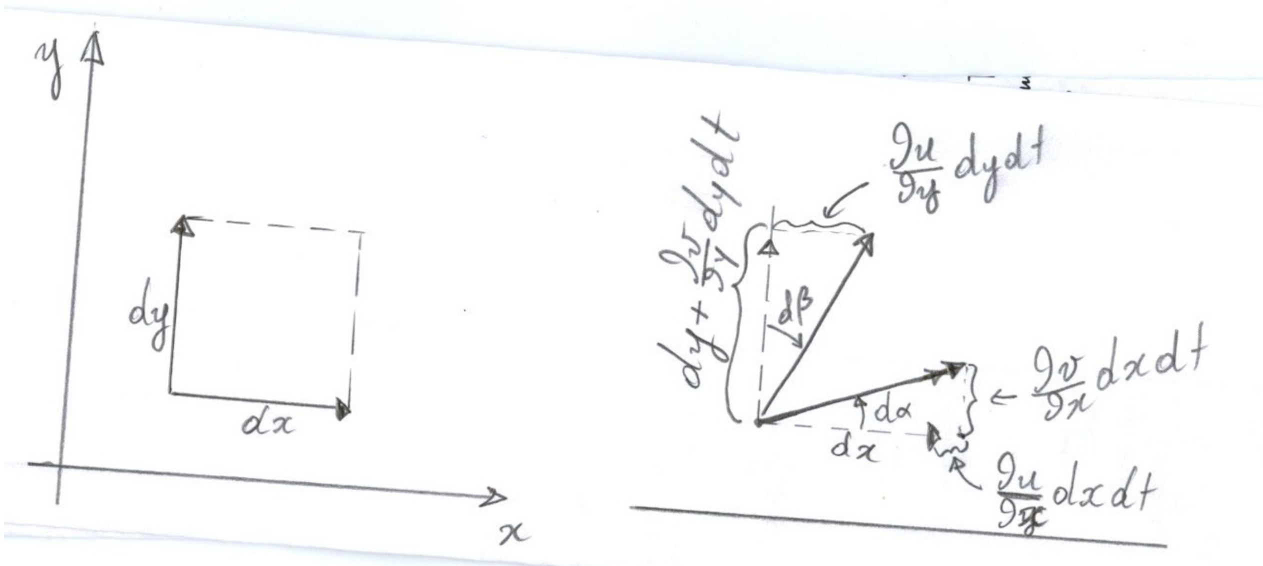
$$\vec{u} \;\; = \;\; -\vec{\nabla}\Phi \tag{3.57}$$

και η Φ ονομάζεται δυναμικό ταχύτητας[17]. Θα αναφερθούμε αργότερα (Κεφ. 5) σ′ αυτή την περίπτωση. Εδώ ας αρκεστούμε να παρατηρήσουμε ότι οι ισοδυναμικές επιφάνειες δηλαδή $\Phi(x, y, z, t)$=σταθ. είναι ορθογώνιες στις γραμμές ροής που είναι εξ ορισμού εφαπτομενικές στο διανυσματικό πεδίο της ταχύτητας. Από τον ορισμό επίσης του δυναμικού φαίνεται ότι όταν $\vec{\zeta} = 0$, οι γραμμές ροής του υγρού έχουν κατεύθυνση από υψηλό δυναμικό σε χαμηλότερο. Αυτό ισχύει αν το δυναμικό Φ ορίζεται με το ¨-’ πρόσημο. Συχνά στην βιβλιογραφία χρησιμοποιείται και το αντίθετο πρόσημο.

Εδώ πρέπει να υπενθυμήσουμε την αναλογία με το ηλεκτροστατικό πεδίο $\vec{E}$. Εάν δεν έχουμε χρονοεξαρτημένο μαγνητικό πεδίο τότε το αντίστοιχο ηλεκτρικό δυναμικό δίνεται από την εξίσωση *Poisson*, όπου οι πηγες είναι η κατανομή της πυκνότητας του φορτίου, ενώ στον ελέθερο χώρο ικανοποιεί την εξίσωση *Laplace*

$$\nabla^2\Phi = 0$$

[17] Το δυναμικό ταχύτητας έχει διαστάσεις L^2/T και δεν πρέπει να συγχέεται με το δυναμικό διατηρητικής δύναμης.



Σχήμα 3.10: Σχ. 3.10 Γωνιακή ταχύτητα και παραμόρφωση δύο γραμμών ρευστου που παραμορφώνονται στο $x - y$ επίπεδο.

εκτός από μεμονομένες ¨πηγές¨, σημειακές η γραμμικές αλλά όχι απαραίτητα μηδενικού εύρους, η οποία πρέπει να λυθεί παίρνοντας υπόψη τις οριακές συνθήκες αλλά και την συμπεριφορά κοντά στις ¨πηγές¨.

Εάν η ροή είναι αστρόβιλη αλλά συμπιεστή τότε πάλι μπορούμε να ορίσουμε το δυναμικό $\Phi(\vec{r}, t)$ αλλά στην περίπτωση αυτή δεν είναι τόσο χρήσιμο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση *Laplace*. Τότε πρέπει να πάρουμε υπόψη και την απόκλιση, η οποία δρά σαν πηγή ανάλογα με την κατανομή της απόκλισης στό χώρο. Σε αντίθεση με το ηλεκτρικό αντίστοιχο όπου συχνά η κατανομή του φορτίου είναι γνωστή, εδώ η απόκλιση εξαρτάται και από την κατανομή της πυκνότητας μέσω της εξίσωσης της συνέχειας. Αυτό προϋποθέτει τη συνολική επίλυση μαζί με τις εξισώσεις διατήρησης της ορμής. Ευτυχώς όμως για ροές με μικρό αριθμό *Mach* μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η απόκλιση μηδενίζεται. Ιδιαίτερα για διδιάστατη ασυμπίεστη ροή μπορούμε να ορίσουμε πάλι μία βοηθητική συνάρτηση, που ονομάζεται *συνάρτηση ροής* της οποίας το φυσικό νόημα θα δούμε στο τέλος του κεφαλαίου. Και στην περίπτωση αυτή η χρησιμότητα της είναι όταν η ροή είναι και αστρόβιλη. Αν και στην περίπτωση αυτή έχουμε τη συνάρτηση δυναμικού και η συνάρτηση ροής θα μας φανεί πολύ χρήσιμη.

3.7.1 Περιστροφή ρευστού σωματιδίου και στροβιλισμός

Μέχρι τώρα εισάγαμε την έννοια του ¨σωματιδίου ρευστού' που κινείται κατά μήκος των γραμμών ροής. Η σημειακή αυτή απεικόνιση αποκρύπτει την πραγματική εικόνα και είναι μία προσέγγιση. Κατ΄ αρχήν το ¨σωματίδιο' έχει όγκο και όπως κάθε στερεό σώμα μπορεί να έχει και περιστροφή γύρω από κάποιο άξονα του. Ταυτόχρονα μπορούμε να έχουμε και παραμόρφωση του σχήματος του σωματιδίου. Όπως θα δούμε όλη αυτή η πληροφορία είναι κρυμμένη στο πεδίο ταχύτητας[18] $\vec{u}(\vec{r})$. Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε μόνο με την περιστροφή του σωματιδίου και θα δείξουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής γύρω από άξονα του συνδέεται με τον στροβιλισμό του πεδίου ταχύτητας.

[18] Τα ίδια συμπεράσματα ισχύουν και αν ακόμη το πεδίο ταχύτητας εξαρτάται από τον χρόνο.

Ας θεωρήσουμε στο Σχ. ;; δύο ευθύγραμμα τμήματα AB και BC με μήκη dy και dx αντίστοιχα, ορθογώνια μεταξύ τους σε χρόνο $t = 0$. Λόγω της ροής, μετά από ελάχιστο χρόνο dt έχουμε μεταβολή του μήκους των τμημάτων αλλά και της μεταξύ τους γωνίας. Σε χρόνο dt τα ευθύγραμμα τμήματα έχουν μήκη $A'B'$ και $B'C'$ και σχηματίζουν γωνίες $d\beta$ και $d\alpha$ αντίστοιχα με τον αρχικό προσανατολισμό. Μπορούμε να ορίσουμε τη γωνιακή ταχύτητα ω_z γύρω από τον z-άξονα, σαν τον μέσο ρυθμό της αντίθετης (προς τους δείκτες του ρολογιού) περιστροφής των δύο γραμμων, αφού προσέξουμε ότι η φορά μέτρησης των γωνιών $d\beta$ και $d\alpha$ είναι αντίθετη. Έτσι έχουμε

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\beta}{dt}\right).$$

Από την γεωμετρία του σχήματος βλέπουμε ότι οι προβολές του $A'B'$ είναι $\frac{\partial u}{\partial y}dydt$ και $dy + \frac{\partial v}{\partial y}dydt$, ενώ οι αντίστοιχες σχέσεις για το $B'C'$ είναι $dx + \frac{\partial u}{\partial x}dxdt$, και $\frac{\partial v}{\partial x}dxdt$. Για μικρό dt μπορούμε να προσεγγίσουμε τις γωνίες $d\alpha$ και $d\beta$ και να τις συνδέσουμε με παραγώγους της ταχύτητας, δηλ.

$$d\alpha = \lim_{dt\to 0}\left[tan^{-1}\frac{\frac{\partial v}{\partial x}dxdt}{dx + \frac{\partial u}{\partial x}dxdt}\right] \approx \frac{\partial v}{\partial x}dt$$

$$d\beta = \lim_{dt\to 0}\left[tan^{-1}\frac{\frac{\partial u}{\partial y}dydt}{dy + \frac{\partial v}{\partial y}dydt}\right] \approx \frac{\partial u}{\partial y}dt$$

και αντικαθιστώντας έχουμε για την γωνιακή ταχύτητα

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε τις άλλες δύο συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right).$$

Αυτές όμως είναι οι συνιστώσες (μέχρι μια πολλαπλασιαστική σταθερά) του στροβιλισμού του πεδίου ταχύτητας. Έτσι,

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{u} \equiv \frac{1}{2}\vec{\zeta}, \qquad (3.58)$$

$$\begin{array}{ccc} [\text{στροβιλισμός}] & = & 2\cdot[\text{γωνιακή ταχύτητα σωματιδίου}] \\ (\text{ στο σημείο } \vec{r}) & & (\text{ γύρω από το σημείο } \vec{r}). \end{array}$$

Επειδή η (;;) είναι διανυσματική σχέση μας δίνει τη δυνατότητα απο τον υπολογισμό της στροφορμής να γνωρίζουμε και την κατεύθυνση του άξονα περιστροφής του σωματιδίου γύρω από τον εαυτό του.

Από το αποτέλεσμα αυτό συμπεραίνουμε ότι για ένα αστρόβιλο πεδίο τα σωματίδια του ρευστού ακολουθούν τις γραμμές ροής χωρίς να περιστρέφονται γύρω από τον άξονα τους. Αυτό δεν σημαίνει ότι στο αστρόβιλο πεδίο δεν έχουμε περιστροφή γύρω από άξονα αναφοράς (εκτός του σωματιδίου). Έτσι μπορούμε να έχουμε καμπυλόγραμμες τροχιές.

Εαν οι γωνίες $d\alpha$ και $d\beta$ είναι ίσες τότε η γωνιακή ταχύτητα ω_z μηδενίζεται και δεν έχουμε περιστροφή. Έχουμε όμως παραμόρφωση η οποία μπορεί να εκφραστεί με το ρυθμό που μεταβάλλεται με το χρόνο η γωνία μεταξύ των ευθύγραμμων τμημάτων, δηλ. η $\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$. Ο ρυθμός δίνεται από την σχέση

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},$$

όπου το σύμβολο $\dot{\epsilon}_{xy}$ είναι το μέτρο της διατμητικής παραμόρφωσης στο $x-y$ επίπεδο. Όπως θα δούμε αργότερα απαιτούνται και άλλες ποσότητες για να εκφράσουμε την παραμόρφωση σε μία τριδιάστατη ροή.

3.8 Διδιάστατη ασυμπίεστη ροή και συνάρτηση ροής.

Στην παρούσα παράγραφο θα εξετάσουμε επιπλέον συνέπειες της ασυμπίεστης ροής όπου η απόκλιση του πεδίου ταχύτητας μηδενίζεται. Θα δούμε ότι οι συνέπειες για διδιάστατες ροές είναι εντυπωσιακές όσο αφορά την επίλυση για το πεδίο ταχύτητας. Για απλότητα θα θεωρήσουμε μόνιμες ροές. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μόνο δύο συνιστώσες της ταχύτητας που εξαρτώνται από τις αντίστοιχες δύο συντεταγμένες. Στην κατηγορία αυτή υπάγονται η επίπεδη ροή σε καρτεσιανές η πολικές συντεταγμένες με

$$\vec{u} = u(x,y)\hat{i} + v(x,y)\hat{j}$$

η

$$\vec{u} = u_R(R,\phi)\hat{e}_R + u_\phi(R,\phi)\hat{e}_\phi$$

καθώς και η αξοσυμμετρική ροή με

$$\vec{u} = u_R(R,z)\hat{e}_R + u_z(R,z)\hat{e}_z$$

όπου δεν έχουμε εξάρτηση από την γωνία ϕ και δεν υπάρχει η αντίστοιχη συνιστώσα της ταχύτητας.

Ο επιπλέον περιορισμός του μηδενισμού της απόκλισης μας δίνει την δυνατότητα να εξαλείψουμε μία συνιστώσα. Σε δύο διαστάσεις για τον μηδενισμό της απόκλισης έχουμε ότι

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3.59}$$

Η (;;) ικανοποιείται αν ορίσουμε μία συνάρτηση $\Psi(x,y)$ τέτοια ώστε

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{3.60}$$

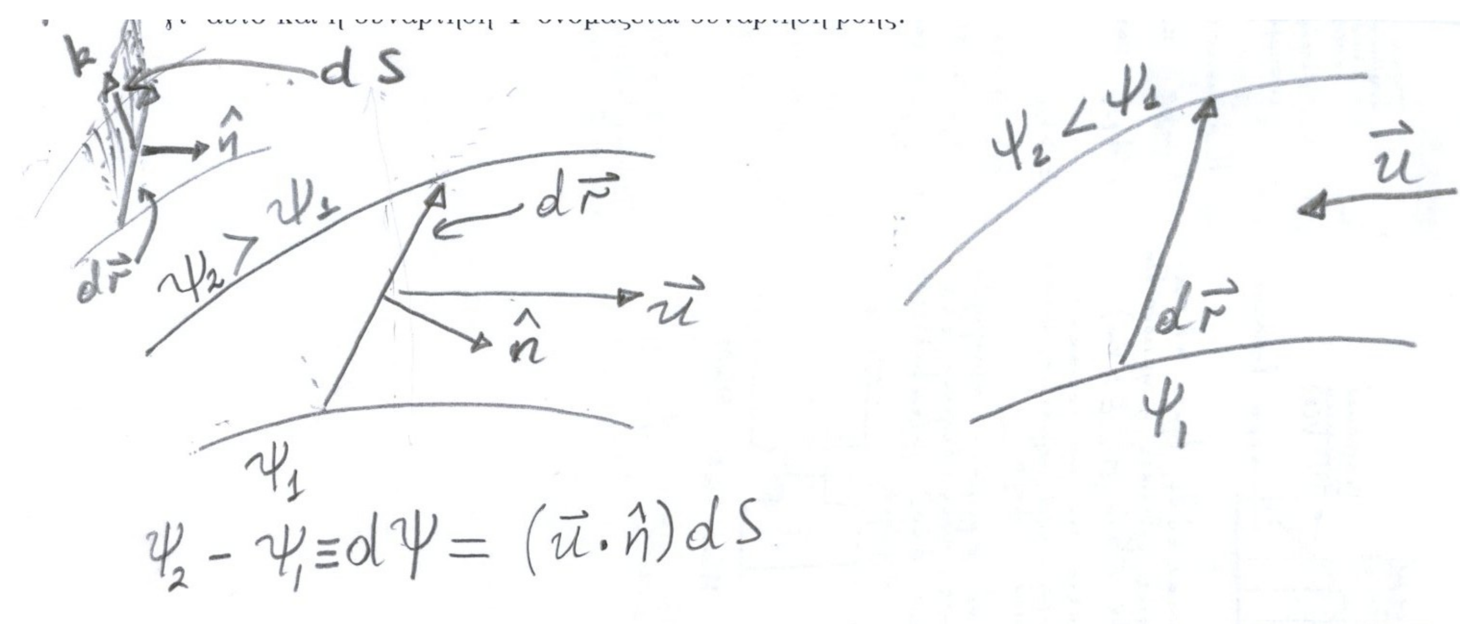
όπως φαίνεται με απλή αντικατάσταση. Ετσι το πρόβλημα περιορίζεται στον προσδιορισμό μόνο της συνάρτησης $\Psi(x,y)$ η οποία φυσικά θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση διατήρησης της ορμής με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες. Αυτό αφήνεται για αργότερα. Από την (;;) βλέπουμε ότι η ταχύτητα είναι εφαπτομένη των καμπυλών με σταθερό $\Psi(x,y,)=\Psi_0$. Οντως έχουμε

$$\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\Psi = 0,$$

γι΄ αυτό και η συνάρτηση Ψ ονομάζεται συνάρτηση ροής.

Το φυσικό νόημα της συνάρτησης ροής είναι εύκολο αν θεωρήσουμε την ροή ανάμεσα από δύο γραμμες ροής με αντίστοιχες τιμές Ψ_1 και Ψ_2. Ο ρυθμός ροής όγκου ρευστού ανά μονάδα κάθετης στο επίπεδο διατομής είναι

$$dQ = (\vec{u}\cdot\hat{n})dS$$



Σχήμα 3.11: Σχ. 3.11 (α) Γεωμετρική ερμηνεία της συνάρτησης ροής ως ρυθμός ροής όγκου μέσω στοιχείου επιφάνειας. (β) κατεύθυνση ροής ανάλογα με την μεταβολή του Ψ.

Σχήμα 3.12: Σχ. 3.12 Γραμμές ροής για αξοσυμμετρική ροή.

όπου η επιφάνεια $dS\hat{n}$ ορίζεται από $dS\hat{n} = d\vec{r} \times \hat{k}$ όπου το διάνυσμα $d\vec{r}$ ενώνει δύο σημεία στις γραμμές ροής του Σχ. ;; και το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{k}$ είναι κάθετο στο επίπεδο ροής. Από τον ορισμό $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$ έχουμε $d\vec{r} \times \hat{k} = dy\hat{i} - dx\hat{j}$ και

$$dQ = \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial y}\hat{i} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\hat{j}\right) \cdot (dy\hat{i} - dx\hat{j}) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}dy = d\Psi$$

δηλ η μεταβολή στην Ψ ανάμεσα σε δύο σημεία είναι αριθμητικά ιση με το ρυθμό ροής όγκου μέσω της ευθείας που ενώνει τα δύο σημεία. Επιπλέον η διεύθυνση ροής ορίζεται απο το αν η μεταβολή της συνάρτησης Ψ είναι θετική η αρνητική ανάμεσα στα δύο άκρα[19].

Σε πολικές συντεταγμένες (R, ϕ) μπορούμε ομοίως να ορίσουμε την συνάρτηση ροής $\Psi(R, \phi)$ και τις αντίστοιχες συνιστώσες της ταχύτητας (u_R, u_ϕ) ως

$$u_R = \frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \tag{3.61}$$

$$u_\phi = -\frac{\partial \Psi}{\partial R} \tag{3.62}$$

που ικανοποιούν επίσης τον μηδενισμό της απόκλισης.

Για την αξοσυμμετρική ροή[20] (Σχ. ;;) έχουμε ομοίως από την συνάρτηση ροής $\Psi(R, z)$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$u_R = -\frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

[19] Αυτό εξαρτάται και από την επιλογή των προσήμων στην (;;). Για την επιλογή μας, εάν το διάνυσμα $d\vec{r}$, ενώνει δύο γραμμές σταθερού Ψ με $\Psi_2 > \Psi_1$ (όπως στο Σχ. ;;α), τότε η ταχύτητα ροής είναι προς τα δεξιά του διανύσματος $d\vec{r}$, ενώ για $\Psi_2 < \Psi_1$ έχει αντίθετη φορά

[20] Η αξοσυμμετρική ροή γίνεται πάνω σε επίπεδα $\phi =$ σταθερά και είναι ανεξάρτητη του ϕ. Ετσι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές η σφαιρικές συντεταγμένες.

$$u_z = \frac{1}{R}\frac{\partial \Psi}{\partial R} \tag{3.63}$$

Στην παραπάνω περίπτωση που δεν έχουμε εξάρτηση από την γωνία ϕ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και σφαιρικές συντεταμένες[21] με $\Psi(r,\theta)$ ώστε οι συνιστώσες ταχύτητας είναι

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$$

$$u_\theta = -\frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial r} \tag{3.64}$$

Οι παραπάνω σχέσεις βγαίνουν εύκολα από τον μηδενισμό της απόκλισης σε κυλινδρικές η σφαιρικές συντεταγμένες. Εξίσου εύκολα όμως βγαίνουν αν εκμεταλευτούμε το φυσικό νόημα της συνάρτησης ροής και διαλέξουμε το κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων. Τις περιπτώσεις αυτές θα συναντήσουμε αργότερα σε αρκετά προβλήματα.

Για διδιάστατη ροή στο επίπεδο $x-y$ ο στροβιλισμός έχει μόνο $z-$συνιστώσα $\vec{\zeta} = \zeta_z \hat{z}$ με

$$\zeta_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.65}$$

Εάν επιπλέον η ροή είναι ασυμπίεστη τότε εισάγουμε την συνάρτηση ροής $\Psi(x,y)$, με τις συνιστώσες της ταχύτητας να δίνονται από τις σχέσεις (;;). Τότε

$$\zeta_z = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\nabla^2 \Psi. \tag{3.66}$$

Ετσι η συνάρτηση ροής ικανοποιεί μία εξίσωση τύπου *Poisson*

$$\nabla^2 \Psi = -\zeta_z \tag{3.67}$$

δηλ. ο στροβιλισμός είναι η πηγή της συνάρτησης ροής, σε δύο διαστάσεις.

Εάν συμβεί ταυτόχρονα η διδιάστατη ροή να είναι και αστρόβιλη, δηλ. έχουμε για την μοναδική συνιστώσα του στροβιλισμού σε καρτεσιανές συντεταγμένες και εύκολα συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση ροής ικανοποιεί την εξίσωση *Laplace* σε δύο διαστάσεις,

$$\nabla_2^2 \Psi(x,y) = 0 \quad \text{διδιάστατη, ασυμπίεστη, αστρόβιλη.} \tag{3.68}$$

Την ιδιότητα αυτή θα εκμεταλευθούμε αργότερα διότι αρκει η λύση της εξίσωσης *Laplace*, για την περίπτωση αυτή, με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες στην συνάρτηση ροής. Να σημειωθεί ότι πουθενά δεν χρειάζεται να υποθέσουμε ότι η ροή είναι μόνιμη, αρκεί να είναι ασυμπίεστη και αστρόβιλη. Το ότι δεν εισέρχεται άμεσα στην εξίσωση *Laplace* ο χρόνος δεν είναι ανησυχητικό, καθόσον μπορεί να μπει μέσω των οριακών συνθηκών. Για την περίπτωση αυτή θα μπορουσαμε να ορίσουμε επίσης την συνάρτηση δυναμικού για την ταχύτητα η οποία υπακούει επίσης την εξίσωση *Laplace*. Απο τον ορισμό της συνάρτησης δυναμικού συνάγουμε ότι οι γραμμές σταθερού δυναμικού είναι κάθετες στις γραμμές σταθερής συνάρτησης ροής.

Για την περίπτωση ασυμπίεστης και αστρόβιλης ροής μπορούμε να γράψουμε και την επιτάχυνση ρευστών σωματιδίων χρησιμοποιόντας την συνάρτηση ροής. Από την (3.53) και (;;) έχουμε

$$\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(u^2) = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(|\vec{\nabla}\Psi|^2) \tag{3.69}$$

[21] Στην περίπτωση αυτή ονομάζεται συνάρτηση ροής *Stokes*.

Λύση της (;;) μας δίνει και την επιτάχυνση των ρευστών σωματιδίων σε κάθε σημείο. Αυτό σημαίνει ότι γνωρίζουμε και την ολική δύναμη λόγω της πίεσης που ασκείται στο σωματίδιο, και από την αρχή διατήρησης ορμής μπορούμε να βρούμε και την πίεση σε κάθε σημείο[22].

Για τρισδιάστατη ασυμπίεστη ροή ($\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0$), όπως για κάθε πεδίο με μηδενική απόκλιση[23] μπορούμε να ορίσουμε ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{A}(\vec{r})$, τέτοιο ώστε $\vec{u}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$. Το $\vec{A}(\vec{r})$ ονομάζεται διανυσματικό πεδίο ροής και η χρήση του θα φανεί στο Κεφ. 7. Εδώ να πούμε ότι για διδιάστατη ροή ($x-y$ επίπεδο) το πεδίο απλοποιείται ως $\vec{A}(\vec{r})=\Psi(x,y)\hat{k}$ ώστε ο στροβιλισμός του έχει μόνο συνιστώσα κάθετη στο $x-y$ επίπεδο.

3.9 Επιτάχυνση σε μη αδρανειακό σύστημα

Στα προηγούμενα[24] υπολογίσαμε την επιτάχυνση ενός ρευστού σωματιδίου απο το πεδίο ταχύτητας χρησιμοποιόντας την υλική παράγωγο. Συχνά το γινόμενό της με την πυκνότητα ονομάζουμε δύναμη αδράνειας, $\rho\frac{D\vec{u}}{Dt}$, που μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αποτελείται από τρεις όρους

$$\rho\left\{\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\vec{\nabla}(\frac{1}{2}u^2)+(\vec{\nabla}\times\vec{u})\times\vec{u}\right\} \tag{3.70}$$

όπου ο πρώτος είναι λόγω της τοπικής αδράνειας και οι άλλοι δύο λόγω της αδράνειας μεταφοράς, με τον πρώτο να προέρχεται από μεταβολή της κινητικής ενέργειας στο χώρο και ο δεύτερος λόγω περιστροφής. Ἰσως η αναφορά στους όρους της (;;) σαν αδρανειακές δυνάμεις να ακούγεται περίεργα αλλά είναι απόλυτα δικαιολογημένη αν κάνουμε μια αναλογία με τις αδρανειακές δυνάμεις (αλλά ταυτόχρονα μας δίνεται η ευκαιρία να τονίσουμε και τις διαφορές) όταν περιγράφουμε την κίνηση ενός στερεού σώματος ως προς ένα περιστρεφόμενο μη αδρανειακό σύστημα. Ενα μη αδρανειακό σύστημα έχει επιτάχυνση, είτε της αρχής των αξόνων είτε και ταυτόχρονη περιστροφή των αξόνων. Ετσι οποιοδήποτε περιστρεφόμενο σύστημα είναι μη αδρανειακό. Εκεί η μετάβαση από το αδρανειακό στο μη αδρανειακό σύστημα εισάγει επιπλέον όρους στον υπολογισμό της επιτάχυνσης οι οποίοι ερμηνεύονται συχνά ως αδρανειακές ψευδοδυνάμεις. Ταυτόχρονα όμως πρέπει να είμαστε προσεκτικοί ώστε η αναλογία αυτή να μην είναι παραπλανητική καθόσον στην υλική παράγωγο το σύστημά μας είναι απόλυτα αδρανειακό. Οι επιπλέον όροι που έχουμε εδώ δεν οφείλονται στην περιγραφή σε ένα μη αδρανειακό σύστημα, (που απαιτεί αλλαγή τοπικών αξόνων), αλλά στην μετάβαση από τις μεταβλητές *Lagrange* σε μεταβλητές *Euler* και τον ορισμό της υλικής παραγώγου, ως την μεταβολή της ταχύτητας με τον χρόνο καθώς ακολουθούμε τον όγκο του υγρού. Οι επιπλέον όροι οφείλονται στην διαφορα της ταχύτητας σωματιδίου και του πεδίου ταχύτητας και στην μετάβαση από την περιγραφή *Euler* στην περιγραφή *Lagrange*. Από την άλλη πλευρά αν έχουμε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς τότε όπως και με το στερεό σώμα η επιτάχυνση που συνδέεται με την χρήση του μη αδρανειακού συστήματος μπορεί να θεωρηθεί ότι εισάγεται με τις ψευδοδυνάμεις *Coriolis* και φυγοκέντρου. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η σχέση ανάμεσα στις επιταχύνσεις στο αδρανειακό και περιστρεφόμενο σύστημα

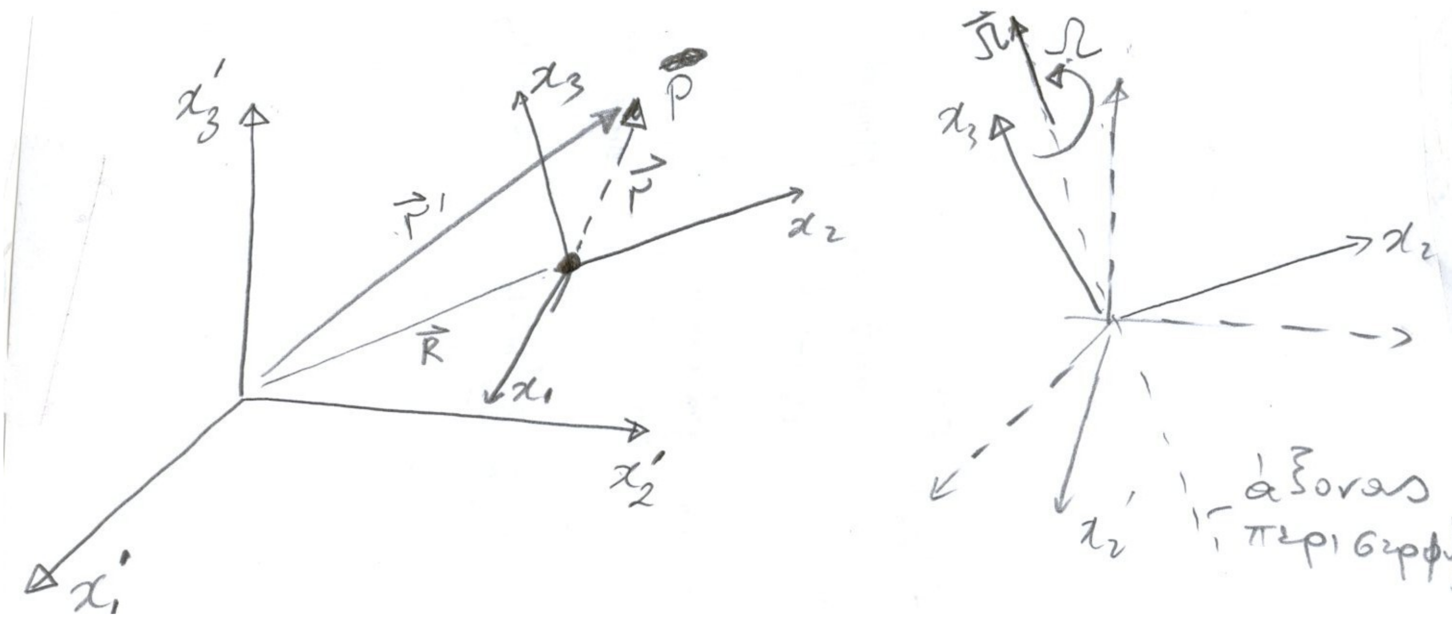
$$\text{επιτάχυνση στο αδρανειακό σύστημα} \quad \left.\frac{D\vec{u}}{Dt}\right|_I$$

$$\text{επιτάχυνση στο μη αδρανειακό σύστημα} \quad \left.\frac{D\vec{u}}{Dt}\right|_R \tag{3.71}$$

[22]Για την περίπτωση που η ροή δεν είναι αστρόβιλη, τότε λύση της (;;) προυποθέτει γνώση του στροβιλισμού. Τότε θα πρέπει να λύσουμε ταυτόχρονα για την συνάρτηση ροής και την πίεση. Συνήθως αυτό είναι εξ΄ ίσου δύσκολο με το να λύσουμε απ΄ ευθείας για το πεδίο ταχύτητας και την πίεση, παίρνοντας υπόψη και τον περιορισμό ασυμπιεστότητας.

[23]Δες αναλογία με το μαγνητικό πεδίο.

[24]Αυτή η παράγραφος μπορεί να παραλειφθεί χωρίς να δημιουργηθούν ελλείψεις για την συνέχεια.



Σχήμα 3.13: Σχ. 3.14 Γεωμετρία αδρανειακού και περιστρεφόμενου συστήματος.

περιλαμβάνει και τους όρους $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$, και $2\vec{\Omega} \times \vec{u}_R$, όπου οι δείκτες I και R αναφέρονται στο αδρανειακό και περιστρεφόμενο σύστημα με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\Omega}$. Οι δύο αυτοί όροι είναι οι αντίστοιχοι όροι επιτάχυνσης κεντρομόλου και *Coriolis*.

Η χρήση μη αδρανειακού συστήματος είναι επιβεβλημένη σε πολλές περιπτώσεις. Ενα παράδειγμα είναι η ροή γύρω από μία επιταχυνόμενη ρουκέτα όπου το σύστημα αναφοράς επί της ρουκέτας είναι μη αδρανειακό. Η ροή στην επιφάνεια της γής γίνεται σε ένα μη αδρανειακό σύστημα που λόγω της περιστροφής της Γής επιταχύνεται σε σχέση με ένα σύστημα σταθερό ως προς τα άστρα. Οι ατμοσφαιρικές και ωκεανογραφικές ροές στην επιφάνεια της γής αισθάνονται επιτάχυνση *Coriolis* της τάξης $10^{-5}g$, όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Παρόλο το μικρό της μέγεθος, μπορεί να έχει σημαντική επίδραση σε μεγάλης κλίμακας ροές. Αντίθετα παραλείπεται σε ροές μικρής κλίμακας όπως σε σωλήνες η γύρω από πτερύγια. Ετσι π.χ. σε αντίθεση με τους κυκλώνες στην ατμόσφαιρα της Γής, ένας στρόβιλος στην μπανιέρα μπορεί να περιστρέφεται με οποιαδήποτε φορά, σε αντίθεση με την επικρατούσα άποψη, και ακόμη να αλλάξει και φορά. Στην περίπτωση αυτή η φορά δεν επηρεάζεται σημαντικά από την περιστροφή της Γης, όσο από τον υπάρχοντα στροβιλισμό στο νερό της μπανιέρας πρίν ανοιξει η καταβόθρα. Από την άλλη πλευρά ο στροβιλισμός σε μιά πισίνα, οποία είναι ακίνητη για αρκετές ημέρες, είναι δυνατόν να επηρεαστεί από την περιστροφή της Γής.

Ας θεωρήσουμε ένα μη αδρανειακό σύστημα αξόνων του οποίου η αρχή O' έχει επιτάχυνση $\vec{a}_0$ σε σχέση με ένα αδρανειακό σύστημα (με αρχή αξόνων στο O), ενώ ταυτόχρονα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\Omega}$ γύρω από ένα άξονα μέσω του σημείου O'.

Εστω $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ και $\hat{e}_3$ τρία κάθετα μοναδιαία διανύσματα στο κινούμενο μή αδρανειακό σύστημα. Τότε κάθε διάνυσμα $\vec{P}$ μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{P} = P_1\hat{e}_1 + P_2\hat{e}_2 + P_3\hat{e}_3$$

Εάν το διάνυσμα αυτό συνδέεται με κάποιο κινούμενο σωματίδιο ρευστού, τότε η μεταβολή του με τον χρόνο στο μή αδρανειακό συστημα, είναι η υλική παράγωγος στό σύστημα αυτό, δηλ.

$$\left.\frac{D\vec{P}}{Dt}\right|_R = \left.\frac{DP_1}{Dt}\right|_R \hat{e}_1 + \left.\frac{DP_2}{Dt}\right|_R \hat{e}_2 + \left.\frac{DP_3}{Dt}\right|_R \hat{e}_3 \tag{3.72}$$

καθώς στο μη αδρανειακό σύστημα τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ και $\hat{e}_3$ δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο. Ενας μη περιστρεφόμενος παρατηρητής στο σημείο O' βλέπει διαφορετικό ρυθμό μεταβολής λόγω της περιστροφής και των μοναδιαίων διανυσμάτων. Ο ρυθμός μεταβολής τους με τον χρόνο[25], λόγω περιστροφής είναι

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\Omega} \times \hat{e}_i$$

για $i = 1, 2, 3$. Ετσι έχουμε

$$\left.\frac{D\vec{P}}{Dt}\right|_I = \left.\frac{D\vec{P}}{Dt}\right|_R + P_1 \frac{d\hat{e}_1}{dt} + P_2 \frac{d\hat{e}_2}{dt} + P_3 \frac{d\hat{e}_3}{dt} \tag{3.73}$$

$$= \left.\frac{D\vec{P}}{Dt}\right|_R + P_1 \vec{\Omega} \times \hat{e}_1 + P_2 \vec{\Omega} \times \hat{e}_2 + P_3 \vec{\Omega} \times \hat{e}_3 \tag{3.74}$$

$$= \left.\frac{D\vec{P}}{Dt}\right|_R + \vec{\Omega} \times \vec{P}. \tag{3.75}$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να εφαρμοστούν για οποιοδήποτε διάνυσμα που μεταφέρεται μαζύ με το σωματίδιο. Θα μπορούσε π.χ. να είναι η θέση $\vec{q}'(t)$ ενός σωματιδίου ρευστού σε σχέση με το O'. Η ταχύτητα του σωματιδίου στο περιστρεφόμενο σύστημα γύρω από το O' είναι

$$\vec{v}_r \equiv \left.\frac{d\vec{q}}{dt}\right|_R = \left.\frac{dq_1}{dt}\right|_R \hat{e}_1 + \left.\frac{dq_2}{dt}\right|_R \hat{e}_2 + \left.\frac{dq_3}{dt}\right|_R \hat{e}_3 \tag{3.76}$$

Η ταχύτητα σε σχέση με το καρτεσιανό σύστημα που κινείται μαζύ με το σημείο O' είναι

$$\vec{v}' = \left.\frac{d\vec{q}}{dt}\right|_R + \vec{\Omega} \times \vec{q}. \tag{3.77}$$

Ομοίως, αν στη θέση του $\vec{P}$ βάλουμε το διάνυσμα της ταχύτητας του σωματιδίου $\vec{v}'$ έχουμε για τον ρυθμό μεταβολής του, δηλ. την επιτάχυνση,

$$\vec{a}' = \left.\frac{d\vec{v}'}{dt}\right|_R + \vec{\Omega} \times \vec{v}'. \tag{3.78}$$

Εάν αντικαταστήσουμε για την ταχύτητα στην (;;) από την (;;) με την (;;) έχουμε

$$\vec{a}' = \left(\frac{d}{dt}\left[\left.\frac{d\vec{q}}{dt}\right|_R + \vec{\Omega} \times \vec{q}\right]\right)_R + \vec{\Omega} \times \left[\left.\frac{d\vec{q}}{dt}\right|_R + \vec{\Omega} \times \vec{q}\right]. \tag{3.79}$$

$$= \left.\frac{d^2\vec{q}}{dt^2}\right|_R + 2\vec{\Omega} \times \left.\frac{d\vec{q}}{dt}\right|_R + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{q} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{q}). \tag{3.80}$$

Ο παρατηρητής στο περιστρεφόμενο και μετατοπιζόμενο σύστημα μετρά σαν ταχύτητα και επιτάχυνση του σωματιδίου

$$\vec{u} = \left.\frac{d\vec{q}}{dt}\right|_R,$$

$$\vec{a} = \left.\frac{d^2\vec{q}}{dt^2}\right|_R.$$

[25] Στην χρονική μεταβολή των μοναδιαίων διανυσμάτων χρησιμοποιούμε την ολική παράγωγο με το χρόνο $\frac{d}{dt}$, αντί της υλικής καθόσον τα έχουμε επιλέξει να έχουν τον ίδιο προσανατολισμό σε όλα τα σημεία του χώρου και εξαρτώνται μόνο από τον χρόνο.

Τελικά αν πάρουμε υπόψη ότι το σύστημα αναφοράς O' μπορεί να έχει και σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}_0$ ταυτόχρονα με την περιστροφή, έχουμε για την επιτάχυνση που βλέπει ο παρατηρητής στο αδρανειακό σύστημα

$$\vec{a}_I = \vec{a}_0 + \vec{a}' = \vec{a}_0 + \vec{a} + 2\vec{\Omega} \times \vec{u} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}), \tag{3.81}$$

όπου αντικαταστήσαμε το διάνυσμα της θέσης του σωματιδίου $\vec{q}$ με το σημείο του χώρου $\vec{r}$, και για την ταχύτητα έχουμε βάλει την αντίστοιχη ταχύτητα πεδίου $\vec{u}(\vec{r}, t)$ στο μη αδρανειακό σύστημα για την ταχύτητα του σωματιδίου όταν είναι στη θέση $\vec{q}(t) = \vec{r}$. Η επιτάχυννση στο μη αδρανειακό σύστημα δίνεται συναρτήσει του πεδίου ταχύτητας στο ίδιο σύστημα από την υλική παράγωγο στο σύστημα αυτό, ως

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt} \equiv \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}.$$

Η ολική επιτάχυνση πρέπει να εξισωθεί με την συνολική δύναμη ανά μονάδα μάζας. Να τονίσουμε ότι η εξίσωση Νεωτον η η αντίστοιχη διατήρησης της ορμής ισχύει για ένα αδρανειακό σύστημα, και επομένως πρέπει να υπολογίσουμε και την αντίστοιχη επιτάχυνση στο αδρανειακό σύστημα. Οι εξωτερικές δυνάμεις που πρέπει να υπολογίσουμε είναι οι πραγματικές δυνάμεις. Συχνά γράφουμε την εξίσωση στο μη αδρανειακό σύστημα με την επιτάχυνση στο μή αδρανειακό σύστημα. Τότε στις δυνάμεις πρέπει να συνυπολογίσουμε και τις λεγόμενες ψευδοδυνάμεις ανά μονάδα μάζας, που δεν είναι τίποτε άλλο παρά οι επιπλέον όροι που υπάρχουν στην επιτάχυνση με αντίθετο πρόσημο. Ετσι π.χ. αντί να μιλάμε για κεντρομόλο επιτάχυνση στο αδρανειακό σύστημα, μιλάμε για φυγόκεντρο ψευδοδύναμη στο μη αδρανειακό σύστημα. Ετσι στο περιστρεφόμενο σύστημα η επιτάχυνση είναι $\vec{a}$ και έχουμε την ψευδοδύναμη ανά μονάδα μάζας,

$$-\vec{a}_0 - 2\vec{\Omega} \times \vec{u} - \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}), \tag{3.82}$$

Ο πρώτος όρος $-\vec{a}_0$ είναι είναι η φαινομενική δύναμη όγκου που αντισταθμίζει την επιτάχυνση μετατόπισης του μη αδρανειακού συστήματος και δεν υπάρχει όταν το αδρανειακό σύστημα έχει μόνο περιστροφή. Ο όρος $-2\vec{\Omega}\times\vec{u}$ είναι η *Coriolis* ψευδοδύναμη και $-\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})$ η φυγόκεντρος ψευδοδύναμη. Ο τελευταίος όρος $-\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}$ υπάρχει μόνο αν η περιστροφή του μη αδρανειακού συστήματος δεν είναι σταθερή με τον χρόνο. Εάν το μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς έχει μόνο ομαλή περιστροφή, το σύνολο των ψευδοδυνάμεων ανά μονάδα μάζας είναι

$$\begin{array}{c}\text{ψευδοδύναμη}\\ \text{στο περιστρεφόμενο}\\ \text{σύστημα}\end{array} = -2\vec{\Omega} \times \vec{u} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}). \tag{3.83}$$

Τις ψευδοδυνάμεις αυτές θα αναλύσουμε λεπτομερώς στο επόμενο κεφάλαιο.