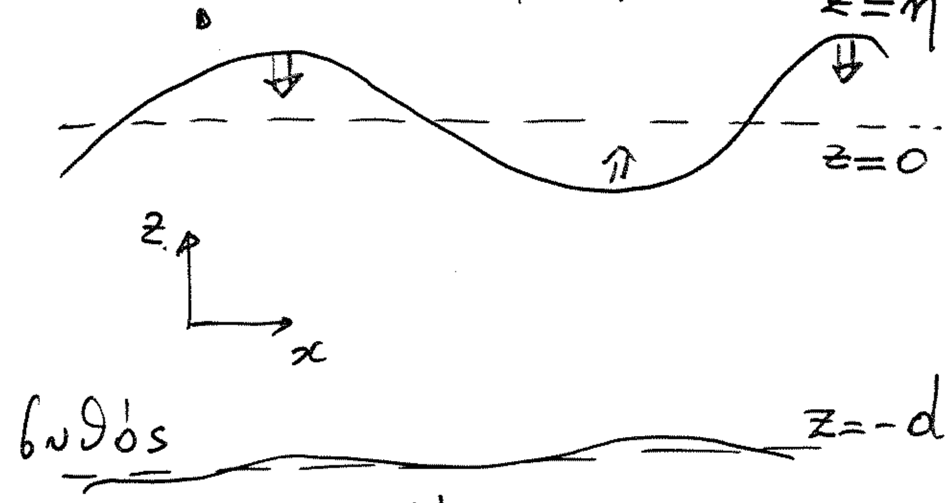
Επιφανειακά Κύματα (9)

$F(x,z,t) = z - \eta(x,t) = 0$

$z = \eta(x,t) \leftarrow$ άγνωστη



ιδανικό ρευστό/ρευ…
ασυμπίεστο ($\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0$)
αστρόβιλο ($\vec{\nabla}\times\vec{u}=0$)

$\vec{u} = -\vec{\nabla}\Phi$

$\Phi(x,z,t)$

$\vec{u} = (u_x, u_z)$

$\Downarrow$

επίπεδος βυθός ($d \to \infty$)

Εξίσωση συνέχειας $\nabla^2 \Phi = 0$, $z < \eta(x,t)$

$+$ B.C. $\Rightarrow \Phi(x,z,t) \Rightarrow \vec{u}(x,z,t)$

Εξίσωση Bernoulli $-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + \frac{P}{\rho} + gz = H(t)$

$\Phi(x,z,t) \Rightarrow P(x,z,t)$ $\qquad z < \eta(x,t)$

μη μόνιμη ροή

$C = H(t)$ - απορροφάται στο Φ

(I) $\nabla^2 \Phi = 0$ δεν έχει μεταβολή χρονική (Laplace αντί κυματική)

Οριακές συνθήκες

(i) $z = -d$ $\qquad u_z(z=-d) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=-d} = 0$

(ii) $z = \eta(x,t)$ $\qquad \frac{D\eta}{Dt} = u_z$ - ταχύτητα σωματιδίου στην επιφάνεια στην z - κατεύθυνση

ή $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_x \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ $\qquad$ ($u_x = $ …

χρονική μεταβολή

(iii) Bernoulli στην επιφάνεια

$z = \eta(x,t) \quad P = P_0 \qquad p - P_0 \to P$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\vec{\nabla}\Phi|^2 + g\eta = 0$$

Οριακές συνθήκες μή γραμμικές

Γραμμικοποίηση (κύματα μικρού πλάτους)

η - μικρό πλάτος

$\vec{u}, \eta, \phi \sim O(\epsilon)$

$\Rightarrow$ παραλείπουμε $\quad u_x \frac{\partial \eta}{\partial x} \sim O(\epsilon^2)$ στην (ii)

$|\vec{\nabla}\phi|^2 \sim O(\epsilon^2)$ στην (iii)

επιπλέον $\quad \phi(\eta,t) \simeq \underset{O(\epsilon)}{\phi(0,t)} + \underset{O(\epsilon^2)}{\left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=0} \eta} + \cdots$;

ανάπτυγμα Taylor

γύρω από $z=0$

$\nabla^2 \phi = 0$

(i) $\left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=-d} = 0 \qquad z=-d$

(ii) $\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad z=0$

(iii) $-\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \qquad z=0 \qquad \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0\right|_{z=0}$

$\eta(x,t) = -\frac{1}{g}\frac{\partial \phi}{\partial t}\Big|_{z=0}$

Οδεύοντα κύματα $\sim e^{i(kx-\omega t)}$

στην x-κατεύθυνση

k, ω - πραγματ

$$\eta(x,t) = Re\{\zeta_0 e^{i(kx-\omega t)}\}$$

$$\Phi(x,z,t) = Re\{\phi(z) e^{i(kx-\omega t)}\}$$

$$\nabla^2 \Phi = 0 \Rightarrow \frac{d^2\phi}{dz^2} - k^2\phi = 0 \quad -d < z \leq 0$$

$(\partial_z^2 + \partial_x^2)\phi$

$+$ B.C. $\quad \frac{d\phi}{dz} = 0 \quad z = -d$

$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \phi}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0 \quad -\omega^2\phi + g\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad z = 0$

$$\phi(z) \sim e^{\pm kz} \Rightarrow \boxed{\phi(z) = A\cosh k(z+d)}$$

$\phi = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz} \quad (i) \ \frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_{z=-d} = 0$

$$(ii) + (iii) \Rightarrow -\omega^2 \cosh kd + g k \sinh kd = 0$$

$$\omega = \sqrt{gk \tanh kd}$$

$$\Phi = A\cosh k(z+d)\cos(kx-\omega t)$$

$$\eta(x,t) = -\frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t}\Big|_{z=0} \Rightarrow A\omega\cosh kd \sin(kx-\omega t)$$

$$\Rightarrow \zeta_0 = iA\omega\cosh kd$$

Απειρο βάθος $d \to \infty$ ή $kd \gg 1$

$$\Phi(x,z,t) = B e^{+kz} \cos(kx - \omega t)$$

$$\eta(x,t) = -\frac{B\omega}{g} \sin(kx - \omega t) \qquad |\zeta_0| = \frac{B\omega}{g}$$

$$p - P_0 = +\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \underbrace{\rho g z}_{\text{υδροστατική πίεση}} = B\omega e^{+kz} \sin(kx - \omega t) - \rho g z$$

$$= \underbrace{-\eta(x,t)\, e^{-kz}} - \rho g z$$

$$\omega = \sqrt{gk}\,, \quad v_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}\,, \quad v_g = \frac{1}{2} v_p$$

$\omega(k)$ - διαφορετικό από ακουστικά κύματα

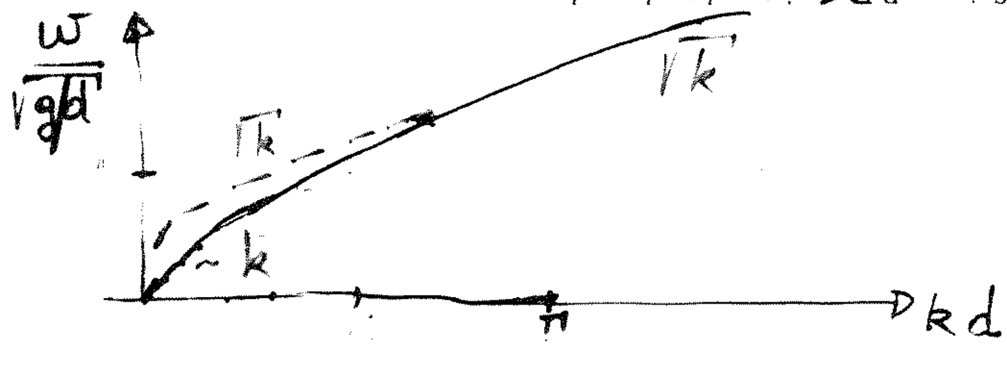
Μικρό βάθος $d \to 0$ ή $kd \ll 1$

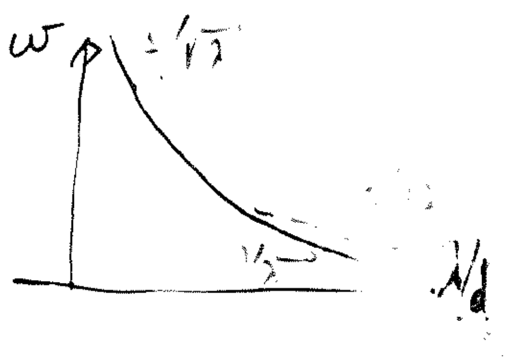
$$\omega = \sqrt{gd}\, k \qquad v_p = v_g = \sqrt{gd} \quad \text{όχι διασπορά}$$

v_p αυξάνει με το d

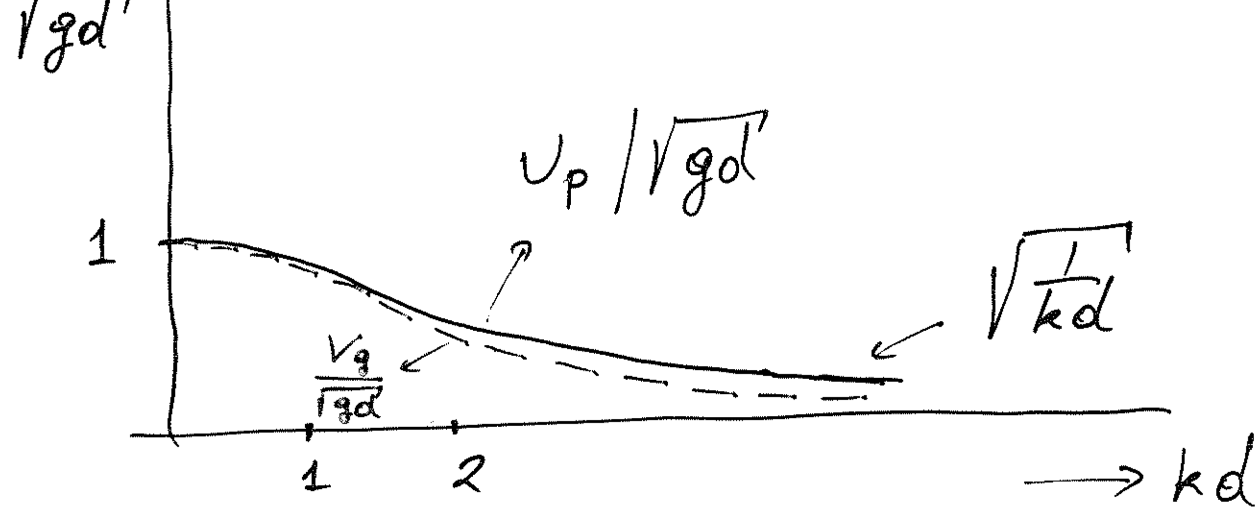
$$kd \simeq \pi \Rightarrow \lambda \simeq 2d \Rightarrow \tanh kd \simeq 0.9963$$

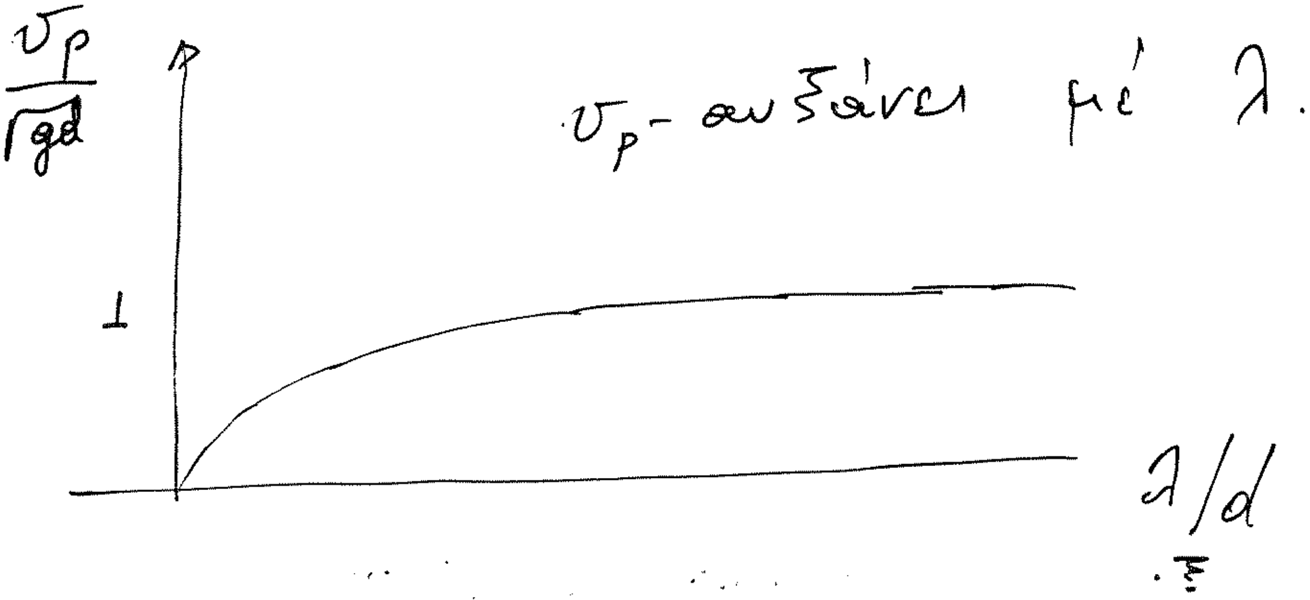
$$\omega^2 \simeq gk \qquad d > \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \text{άπειρο βάθος.}$$





$$v_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gd}\,\sqrt{\frac{\tanh kd}{kd}}$$





$d = 5\,km$ $\quad$ $T = 15\,sec$ $\quad$ $\omega = \frac{2\pi}{T} \simeq 0.4\,sec$.

$\frac{1}{k} = \frac{g}{\omega^2} \simeq 63\,m \ll 5\,km$. $\quad$ $\lambda \simeq 400\,m$

$C_p = 25\,m/sec = 90\,km/hr$

Μέγιστη $\sqrt{gd} \simeq 800\,km/hr$

Ενέργεια και ορμή

$$E(t)\,,\ \mathcal{P}(t) \xrightarrow[T=2\pi/\omega]{\eta_0 \sin(kx-\omega t)} \langle E(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, E(t)$$

Ενέργεια ανά μονάδα οριζόντιας επιφάνειας $\Rightarrow$ $$\frac{\langle K.E\rangle}{\text{επιφάνεια}} = \left\langle \int_{-\infty}^{0} dz\, \underbrace{\frac{1}{2}\rho u^2}_{\text{πυκνότητα κινητικής ενέργειας}} \right\rangle \sim \eta_0^2$$

Προσέγγιση πάνω όριο $\eta(x,t) \to 0$

$$u_x = -\omega \eta_0 e^{kz} \sin(kx-\omega t)$$

$$u_z = -\omega \eta_0 e^{kz} \cos(kx-\omega t)$$

$$u^2 = \omega^2 \eta_0^2 e^{2kz} \quad \text{ανεξάρτητο } t$$

$\omega^2 \simeq gk$

$$\frac{\langle K.E\rangle}{\text{επιφάνεια}} = \frac{1}{2}\rho \omega^2 \eta_0^2 \int_{-\infty}^{0} dz\, e^{2kz} = \frac{1}{4}\rho \frac{\omega^2}{k}\eta_0^2 \simeq \frac{1}{4}\rho g \eta_0^2$$

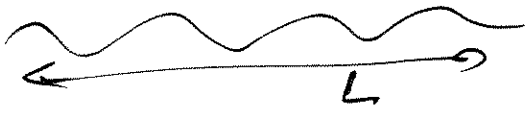
$$\text{ενέργεια σε } \lambda = \frac{1}{4}\rho \frac{\omega^2}{k}\eta_0^2 \lambda = \frac{\pi}{2}\rho \frac{\omega^2}{k^2}\eta_0^2 \xrightarrow{\omega^2 = gk} \frac{\pi}{2}\rho g \frac{1}{k}\eta_0^2$$

$$\frac{\langle U\rangle}{\text{επιφάνεια}} = \left\langle \int_0^{\eta(x,t)} dz\, \rho g z \right\rangle = \frac{1}{2}\rho g \langle \eta^2\rangle = \frac{1}{4}\rho g \eta_0^2$$

$$\frac{\langle E\rangle}{\text{επιφάνεια}} = \frac{1}{2}\rho g \eta_0^2 \sim \eta_0^2$$

$\langle E\rangle \sim$ έκταση κύματος

$L \to \infty \quad \langle E\rangle \to \infty$



Μέση οριζόντια ορμή ανά επιφάνεια $<P_x>$

$$\frac{<P_x>}{\text{επιφάνεια}} = \Big< \int_{-\infty}^{\eta} \rho u_x \, dz \Big> = \Big< -\rho \omega \eta \underbrace{\int_{-\infty}^{\eta} e^{kz} dz}_{\frac{1}{k} e^{k\eta}} \Big>$$

$$u_x = -\eta \omega e^{kz}$$

$$= -\frac{\rho \omega}{k} < \eta e^{k\eta} > = \frac{\rho \omega}{2} \eta_0^2 \quad \Big\{ k\eta << 1 , \ \frac{\eta_0}{\lambda} <<$$

$$< \eta e^{k\eta} > \simeq < \eta (1 + k\eta) > = k < \eta^2 > = \frac{1}{2} k \eta_0^2$$

$$\frac{<E>}{<P_x>} = \frac{\frac{1}{2} \rho g \eta_0^2}{\frac{1}{2} \rho \omega \eta_0^2} = \frac{g}{\omega} = \sqrt{\frac{g}{k}} = V_p$$

$$\boxed{<E> = V_p <P_x>}$$

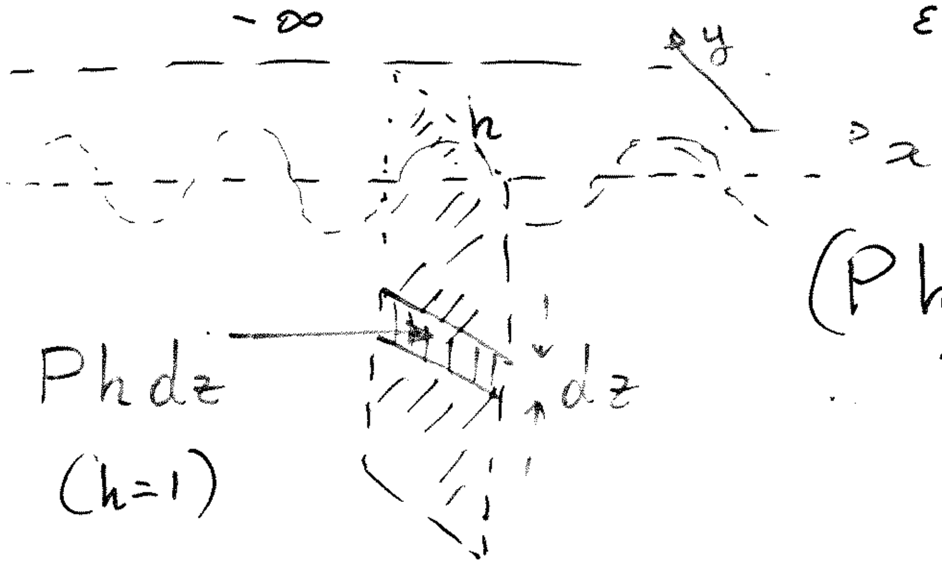
$$< P_z > \sim \Big< \int_{-\infty}^{\eta} \rho u_z \, dz \Big> = \Big< \frac{\rho \omega}{k} \eta_0 \cos(k - \omega t) e^{k\eta}$$

$$= \rho \omega \eta_0^2 < \cos(kx - \omega t) \sin(kx - \omega t) > = 0$$

u_z ακολουθεί την $\eta(x,t)$ κατά $\pi/2$

Ρυθμός Ροής ενέργειας

$$\left\langle h \int_{-\infty}^{0 \,\leftarrow\, \eta(x,t)} P(x,z,t)\, u_x \, dz \right\rangle$$ ρυθμός έργου πίεσης μέσω κάθετης επιφάνειας



$(P h dz) u_x$ - ισχύς

$Phdz$

$(h=1)$

$$\underset{\sim \eta_0}{P - P_0 = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}} - \underset{\sim \eta_0}{\rho g z}$$ Bernoulli στον όγκο. $\frac{1}{2}u^2 \sim \eta_0^2$

$$\left\langle \int_{-\infty}^{0} (-\rho g z)\, u_x \, dz \right\rangle = \int_{-\infty}^{0} dz\, (-\rho g z) \langle u_x \rangle = 0$$

επόμενος όρος $\sim \eta_0^3$

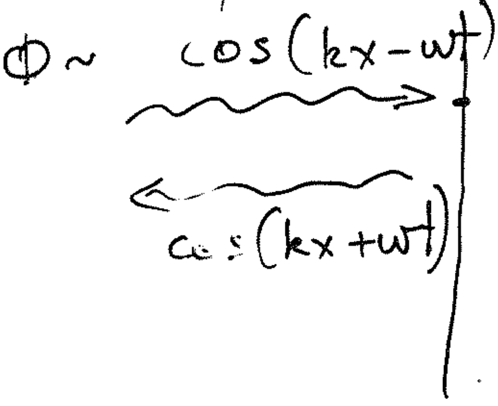
$$\phi = A e^{kz} \cos(kx - \omega t) = \frac{\omega}{k} \zeta_0 e^{kz} \cos(kx - \omega t)$$

$$\left\langle \int_{-\infty}^{0} \left(-\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) u_x \, dz \right\rangle = \rho \frac{\omega^2}{k} \zeta_0^2 \underbrace{\langle \sin^2(kx - \omega t) \rangle}_{1/2} \int_{-\infty}^{0} e^{2kz} dz$$

$$= \frac{1}{4} \rho \frac{\omega^2}{k^2} \zeta_0^2$$

Ταχύτητα ροής ενέργειας $= \dfrac{\frac{1}{4}\rho \frac{\omega^2}{k^2} \zeta_0^2}{\frac{1}{2} \rho g \zeta_0^2} = \dfrac{\omega}{2k} \equiv V_g$ $\quad \dfrac{\text{Εργο/χρόνο}}{\text{ενέργεια/μήκος}} \rightarrow \dfrac{\text{μήκ}}{\text{χρόν}}$

Επιφανειακά κύματα μέ εμπόδια.



$$u_x(x=0) = 0$$

$$\Phi = A\cosh k(z+d)\cos(kx-\omega t) + A\cosh k(z+d)\cos(kx+\omega t)$$

$x=0$ $\quad \phi_x(x=0) = 0$ $\qquad |u_z(x=0)|$ μέγιστο.

$\qquad\quad u_x(\cancel{x=0}) = 0$

$$\Phi(x,z,t) = 2A\cosh k(z+d)\,\cos kx\,\cos\omega t$$

$$\eta(x,t) = -\frac{1}{g}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big|_{z=0} = \underbrace{-2A\omega\cosh kd}_{\eta_0}\;\cos kx\,\sin\omega t$$

$$A = -\frac{\eta_0}{2\omega\cosh kd}$$

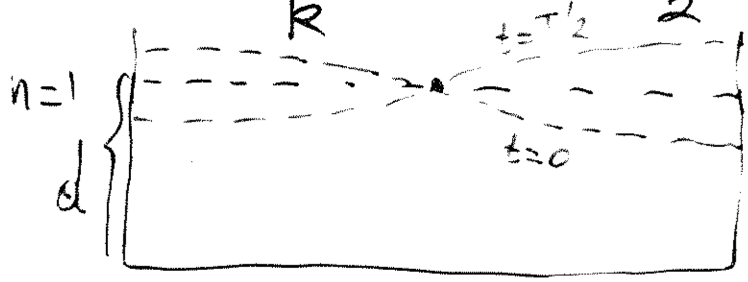
$$u_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \eta_0\frac{k}{\omega\cosh kd}\cosh k(z+d)\,\sin kx\,\cos\omega t$$

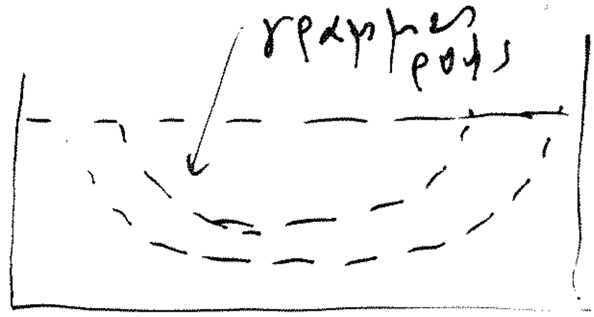
$$u_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\eta_0\frac{k}{\omega\cosh kd}\sinh k(z+d)\,\cos kx\,\cos\omega t$$

Στάσιμα κύματα μέ κόμβους.

$kx = 0,\ n\pi \qquad u_x = 0 \qquad$ ισχύει γιά μήκος

$$L = \frac{n\pi}{k} \quad \text{ή} \quad n\frac{\lambda}{2} = L$$





Ταλαντώσεις λιμανιού

$$\omega = \sqrt{gk \tanh kd}$$ - ίδια γιά οδεύοντα κύματα

αλλά τώρα μόνο ορισμένα k

$$\Phi(x,y,z) = \phi_0(x,y)\,\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}$$

$$\nabla^2 \Phi = 0 \implies \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi_0(x,y) + k^2 \phi_0 = 0$$

\+ οριακές συνθήκες

α) Τετραγωνικό λιμάνι

$$\phi_0 = A \cos\frac{m\pi x}{L_x} \cos\frac{n\pi y}{L_y}$$ n, m - ακέραιοι

$$u_x\big|_{x=0,L_x} = 0 \quad , \quad u_y\big|_{y=0,L_y} = 0$$

$$k^2 = \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \implies \omega_{n,m}(k)$$

Αν έχουμε εξαναγκασμένη ταλάντωση μέ $\omega = \omega_{nm}$

$\Rightarrow$ συντονισμό