Διαστατική Ανάλυση

8

Εξισώσεις

Συνέχειας $\frac{D\rho}{Dt} + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$

Ορμής $\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\vec{f}_b - \vec{\nabla}P + \mu\nabla^2\vec{u}$

Ενέργεια εσωτερική $\rho\frac{De_0}{Dt} = \vec{\nabla}\cdot(K\vec{\nabla}T) - P\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + \Phi$

συνήθως μονάδες m, kg, sec °K

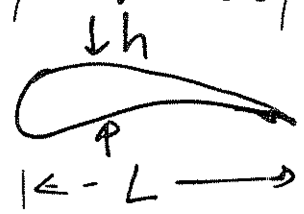
φυσικές ποσότητες L, M, T, Θ

$M \downarrow \rho_\infty L^3$, $T \downarrow L/u_0$

Φυσικές κλίμακες
(χαρακτηριστικά μεγέθη)

Παράδειγμα: ασυμπίεστο, ατιξωδικό ρευστό

u_∞
ρ_∞



$\frac{h}{L}$ αδιάστατη

	μονάδες	κλίμακες	αδιάστατες
L	m	L	$\vec{r}' = \vec{r}/L$
M	kg ⇒	$\rho_\infty L^3$	$\rho' = \rho/\rho_\infty$
T	sec	L/u_∞	$t' = t/(L/u_\infty)$

β) μόνιμη, ασυμπίεστη, ιξωδική

c_0 - ταχύτητα ήχου (συμπιεστότητα)

μ - δυναμικό ιξώδες

Νέες κλίμακες L και T

L και $L_\nu = \dfrac{\mu}{\rho_\infty u_\infty}$ $\qquad$ $\dfrac{L}{u_\infty}$ και $T_\nu = \dfrac{L}{c_0}$

$$\frac{L}{L_\nu} = \frac{L}{\mu/(\rho_\infty u_\infty)} = Re \; !!!$$

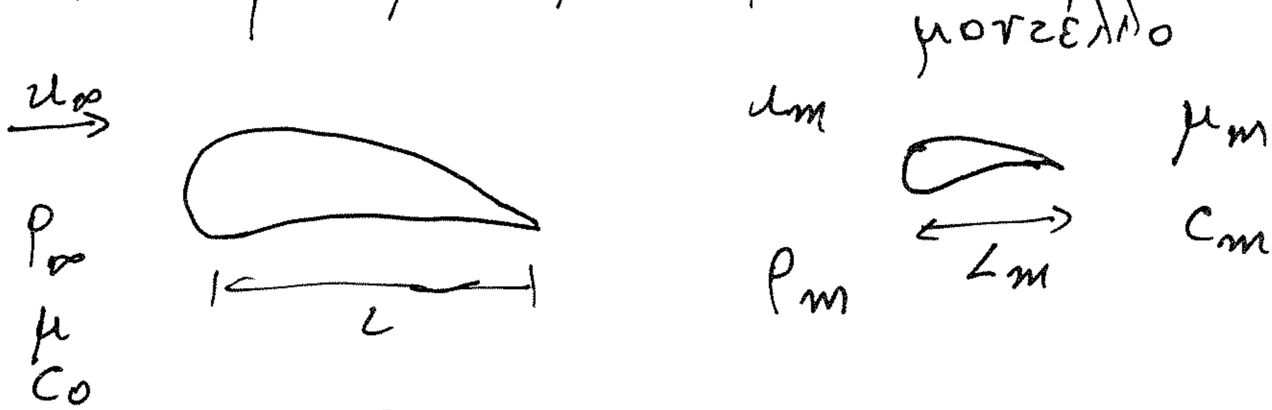
όχι παντού

$Re \gg 1$ $\quad L$

$Re \ll 1$ $\quad L_\nu$

$$\frac{T_\nu}{T} = \frac{L/c_0}{L/u_\infty} = Ma \; !!!$$

Δυναμική ομοιότητα



Όταν ίδια

$$Re = \frac{\rho L u_\infty}{\mu} = \frac{\rho_m L_m u_m}{\mu_m}$$

$$Ma = \frac{u_\infty}{c_0} = \frac{u_m}{c_m}$$

Αδιαστατοποίηση

Κλίμακες ή χαρακτηριστικές ποσότητες $L, u_\infty, \rho_\infty, \mu_\infty$

$$x_i^* = \frac{x_i}{L} \quad t^* = \frac{t}{L/u_\infty} \quad u_i^* = \frac{u_i}{u_\infty}, \quad \rho^* = \rho/\rho_\infty$$

συμπιεστά

$$\mu^* = \frac{\mu}{\mu_\infty},$$

μη Νευτώνικα

+

<u>Υλική παράγωγος</u> $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})$

$$T_{Local} = \frac{L}{u_\infty} \quad ; \quad \frac{D}{Dt} = \frac{u_\infty}{L}\left(\frac{\partial}{\partial t^*} + u_i^* \frac{\partial}{\partial x_i^*}\right) = \frac{u_\infty}{L}\frac{D}{Dt^*}$$

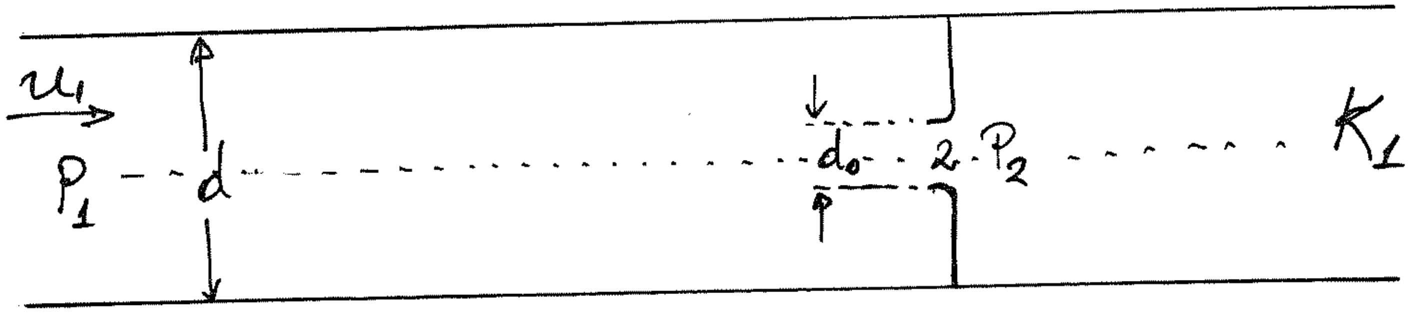
Αν $T_{Local} \neq \frac{L}{u_\infty} \Rightarrow Strouhal = \frac{T_{local}}{L/u_\infty} \Rightarrow \frac{u_\infty}{\cancel{t}\,u}$

Διατήρηση μάζας $\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\,\vec{\nabla}\cdot\vec{u} \rightarrow Ma = \frac{u}{c_0}$

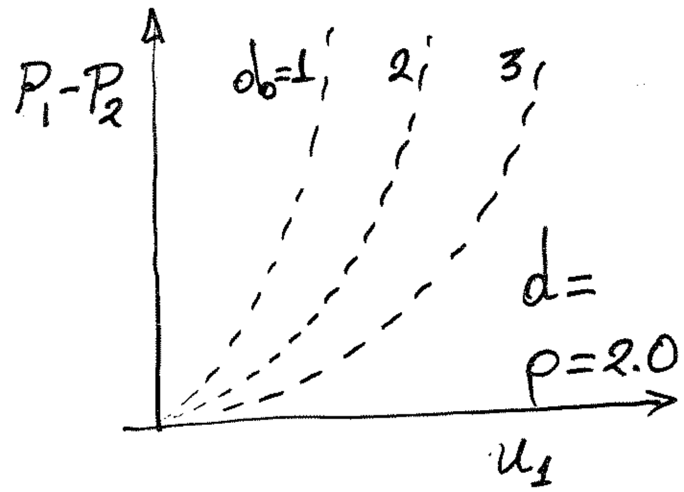
Διατήρηση ορμής $\boxed{Re = \frac{\rho L u_\infty}{\mu},} \quad C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2}\rho u^2} = \frac{1}{Eu}$

$$Froude = \frac{u_\infty}{\sqrt{Lg}}$$

Κυλινδρικός σωλήνας μέ φράγμα



$P_2 - P_1$ εξαρτάται από u_1, d, d_0, ρ



Επαναλαμβάνουμε τό πείραμα γιά τιμές d καί ρ.

Μήπως υπάρχει πιό σύντομη διαδικασία.

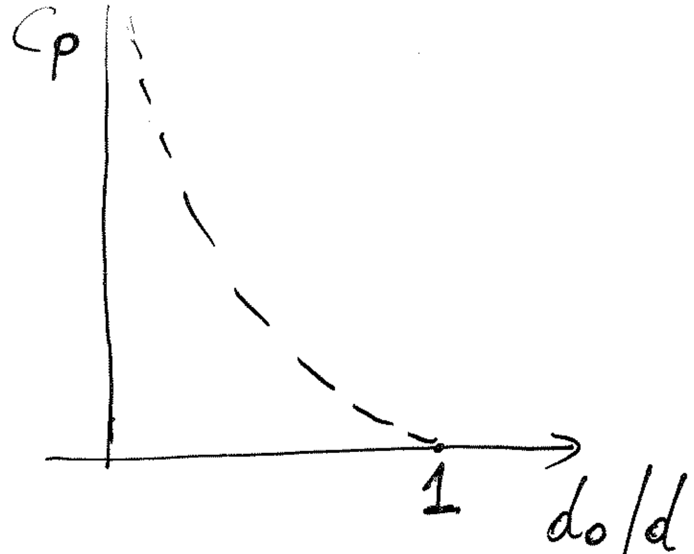
1) Χρησιμοποιούμε τήν εμπειρία μας γιά νά βρούμε σημαντικές παραμέτρους.
2) Καλύτερα, κάνοντας βασικές υποθέσεις καί χρησιμοποιώντας τούς βασικούς νόμους.

Ασυμπίεστο ρευστό $\Rightarrow \dfrac{u_2}{u_1} = \left(\dfrac{d}{d_0}\right)^2$ κυκλική διατομή

Κατά μήκος K_1 περιμένουμε σχεδόν αστρόβιλη ροή (καί ανιξωδική) μέ σταθερή πυκνότητα.

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho u_2^2 - \frac{1}{2}\rho u_1^2$$

Ορίζουμε $C_p = \dfrac{P_1 - P_2}{\frac{1}{2}\rho u_1^2} = \left(\dfrac{d}{d_0}\right)^2 - 1$ συντελεστής πίεσης



Μόνο C_p vs $\left(\dfrac{d_0}{d}\right)$ αρκεί

Αποκλίσεις από τήν C_p γιά διαφορετικό ρ ή u_1 σημαίνει δέν ισχύουν απόλυτα οι υποθέσεις. Τότε → ??

Θεώρημα Buckingham

n- παράμετροι στό πρόβλημα

k - βασικές παράμετροι συνήθως $k=3,4$

π.χ. L, T, ρ, Θ or L, U, ρ, Θ or...

n-k εκφράζονται συναρτήσει τών k.

$\underbrace{a_1, \ldots a_k}_{\text{βασικές}}$ $\underbrace{a_{k+1}, \ldots a_n}_{\text{εξαρτημένες}}$ διαφορετικές διαστάσεις

κάθε $a_{l=1,\ldots n} = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_k^{l_k}$

Γιά κάθε $a_{k+1}, \ldots, a_n$

$$\Pi_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{a_1^{l_1} \ldots a_k^{l_k}}$$ αδιάστατες ποσότητες

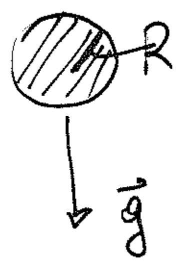
$l_1, \ldots l_k$ - διαφορετικά γιά κάθε a_{k+i}

Κάθε μία από τά $\Pi_{k+1} \ldots \Pi_n$ γράφεται σάν συνάρτηση τών υπολοίπων

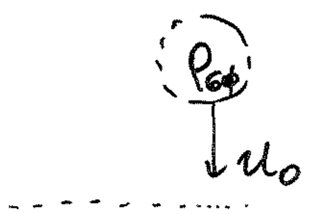
$$\Pi = \frac{a_p}{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_k^{p_k}} = \Phi\left(\Pi_{k+1}, \ldots \Pi_n\right)$$

συνάρτηση $n-k$ παραμέτρων.

Μορφή της όμως άγνωστη!!
Βοήθεια από φυσική διαίσθηση και βασικούς νόμους.



$\rho_{υγ}, \mu$



$\rho_{υγ}, \rho_{σφ}, R, g, u_0, \mu$

$n = 6$ παράμετροι

$k = 3$ βασικές $R, \rho_{υγ}, g$

$n-k = 3$ εξαρτημένες

$$\Pi_1 = \frac{\rho_{σφ}}{\rho_{υγ}} \qquad \Pi_2 = \frac{u_0^2}{Rg} \qquad \Pi_3 = u_0 \frac{R\rho_{υγ}}{\mu}$$

$\Pi_1 > 1$ πτώση

$\Pi_1 < 1$ άνοδο

$$\Pi_2 \rightarrow F_r^2 \rightarrow \frac{F_{αδρ.}}{F_{βαρύτητα}} \qquad \Pi_3 \rightarrow Re \Rightarrow \frac{F_{αδρ.}}{F_{ιξωδ}}$$

$\Pi_2 = f(\Pi_1, \Pi_3)$ ή $\Pi_3 = g(\Pi_1, \Pi_2) \Rightarrow u_0.$

$$\frac{u_0^2}{Rg} = f\left(\frac{u_0 R \rho_{υγ}}{\mu}, \frac{\rho_{σφ}}{\rho_{υγ}}\right)$$ επιλογή

+ φυσικά επιχειρήματα.

Re, u_0 μικρά

βαρύτητα ≃ ιξώδη ≃ $\vec{a} \simeq 0 \Rightarrow u_0$-οριακή

$\underbrace{\sim g \qquad \sim \mu}$ μόνο ως λόγος g/μ

$$\Rightarrow \frac{u_0^2}{Rg} = \frac{u_0 R \rho_{υγ}}{\mu} g\left(\frac{\rho_{σφ}}{\rho_{υγ}}\right)$$ — $g()$ άγνωστη συνάρτηση

Αν $\rho_{υγ} = \rho_{σφ}$ ισορροπία $\Rightarrow u = 0$

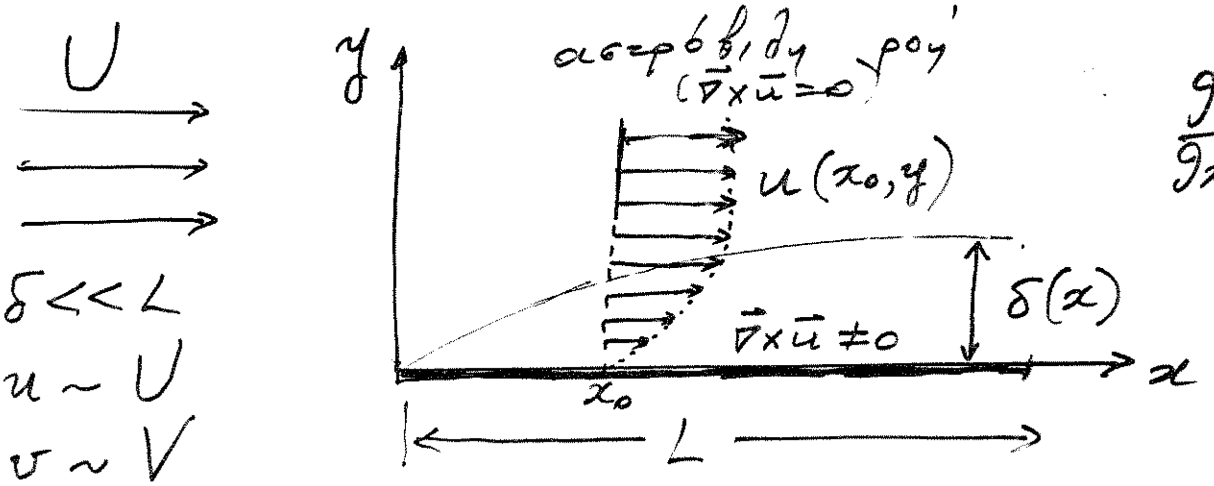
βαρύτητα - άνωση $\simeq g(\rho_{σφ} - \rho_{υγ})$

$\rho_{σφ} > \rho_{υγ}$ - πτώση

$\rho_{σφ} < \rho_{υγ}$ - άνοδο

$$g\left(\frac{\rho_{σφ}}{\rho_{υγ}}\right) = C\left(\frac{\rho_{σφ}}{\rho_{υγ}} - 1\right)$$

άγνωστη σταθερά



$\delta << L$

$u \sim U$

$v \sim V$

$\frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{L}$

$\frac{\partial}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta}$

Navier Stokes

x- $$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$

$$\frac{U^2}{L} \qquad \frac{UV}{\delta}\sim\frac{U^2}{L} \qquad \frac{\Delta P}{\rho L} \quad + \quad \frac{\nu U}{L^2} \qquad \frac{\nu U}{\delta^2}$$

y- $$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$$\frac{UV}{L}\sim\frac{U^2\delta}{L^2} \qquad \frac{V^2}{\delta}\sim\frac{U^2\delta}{L^2} \qquad \frac{\Delta P}{\rho\delta} \qquad \cancel{\frac{\nu V}{L^2}} \qquad \frac{\nu V}{\delta^2}\sim\frac{\nu U}{\delta L}$$

εξίσωση συνέχειας

$$\left.\begin{matrix}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{U}{L} \qquad \frac{V}{\delta}\end{matrix}\right\} \Rightarrow V \sim \frac{\delta}{L}U, \qquad \begin{matrix} V << U \\ \delta << L\end{matrix}$$

$$\underbrace{\frac{U^2}{L} \sim \frac{\nu U}{\delta^2}} >> \frac{\Delta P}{\rho L}$$

υπόθεση

$Re >> 1$

Re ⇓

$$\frac{UL}{\nu} \sim \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \sim Re^{-1} \qquad \delta \sim L/\sqrt{Re}$$

Λύση σέ δύο περιοχές καί συμφωνία στό όριο τού οριακού στρώματος

A) Εκτός οριακού στρώματος αστρόβιλη ροή Επίδραση ιξώδους αμελητέα

$y \gg \delta(x) \qquad u \simeq U \qquad \frac{du}{dx} \sim 0 \qquad v \sim 0$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} \simeq -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \to 0$$

B) Αντί νά λύσουμε τά δύο προβλήματα (σύνθετο αριθμητικό πρόβλημα) θα λύσουμε μόνο μέσα στό οριακό στρώμα μέ οριακές συνθήκες

$y = 0 \implies u = v = 0$ (μή ολίσθηση

$y = \delta(x) \implies u = \overline{U}(x)$

Γ) Επιπλέον υπόθεση $\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} \sim 0$ (Blasius)

$\Rightarrow$ παραλείπουμε $\frac{\partial P}{\partial x}$ πού είναι συνεχής στό $y=\delta(x)$.

<u>Λύση Blasius</u>

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad +$$

B.C. $y=0;\ u=v=0$

$y\to\infty \quad u\to U$

$x=0 \quad u(y)=U$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Συνάρτηση ροής $\psi(x,y)$

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

μέ οριακές συνθήκες

$$y=0 \Rightarrow \psi=\text{σταθερά}$$

$$y\to\infty \Rightarrow \psi \rightsquigarrow Uy$$

$$x=0 \Rightarrow \psi = Uy$$

Λύση αυτοσημορφούμενας $u(x,y)\simeq \overset{\simeq U}{u_0}(x)\,g\left(\frac{y}{\Delta(x)}\right)$

δηλ. γιά κάθε x η μεταβολή στην y-γίνεται σέ μεταβλητή κλίμακα $\Delta(x)\sim\delta$

Αν $\psi=U\Delta f\left(\frac{y}{\Delta}\right) \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial y}=Uf'\left(\frac{y}{\Delta}\right) \Rightarrow f'=g$

$$v=U\left[f-\frac{y}{\Delta}f'\right]\frac{d\Delta}{dx} \qquad u=Uf'\left(\frac{y}{\Delta}\right)$$

Αντικατάσταση στήν Navier-Stokes

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-U\frac{y}{\Delta^2}g'\frac{d\Delta}{dx}=-U\frac{y}{\Delta^2}f''\frac{d\Delta}{dx}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u_0}{\Delta}f''\left(\frac{y}{\Delta}\right) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{U}{\Delta^2}f'''$$

Navier Stokes (x-)

$$\underbrace{U f' \left\{ -U \cancel{\frac{y}{\Delta^2} f'' \frac{d\Delta}{dx}} \right\}}_{u \frac{\partial u}{\partial x}} \underbrace{- U \left[f - \cancel{\frac{y f'}{\Delta}} \right] \frac{d\Delta}{dx}}_{v \frac{\partial u}{\partial y}} \frac{U}{\Delta} f'' = \underbrace{\nu \frac{U}{\Delta^2} f'''}_{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$$

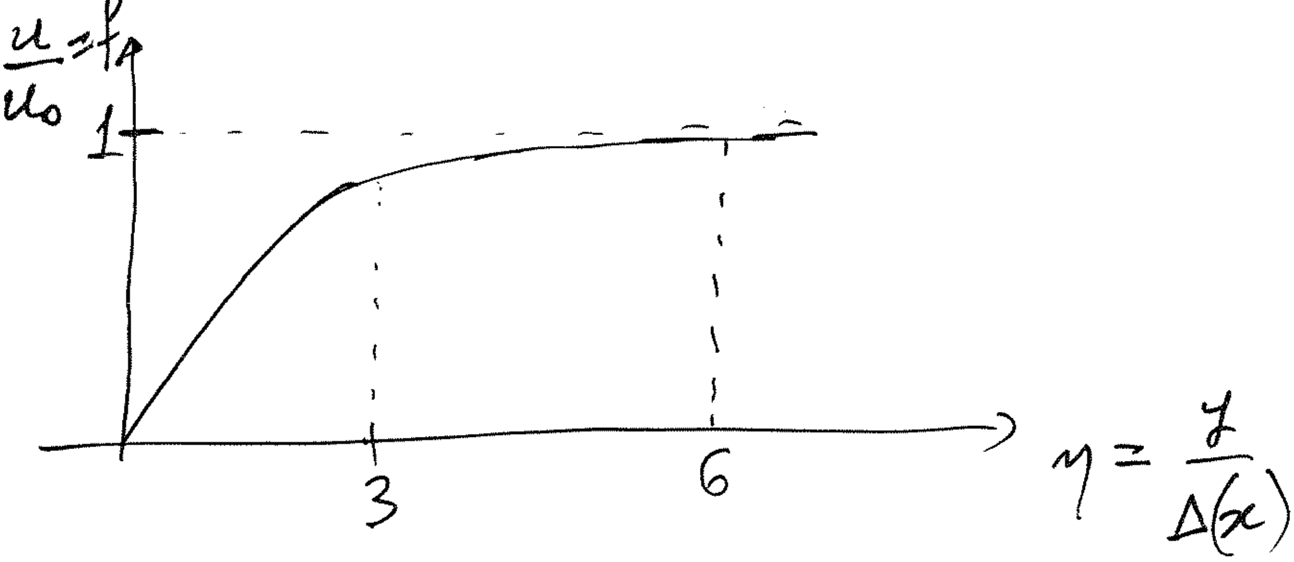
$$\frac{U^2}{\Delta} \frac{d\Delta}{dx} f f'' + \frac{\nu U}{\Delta^2} f''' = 0$$

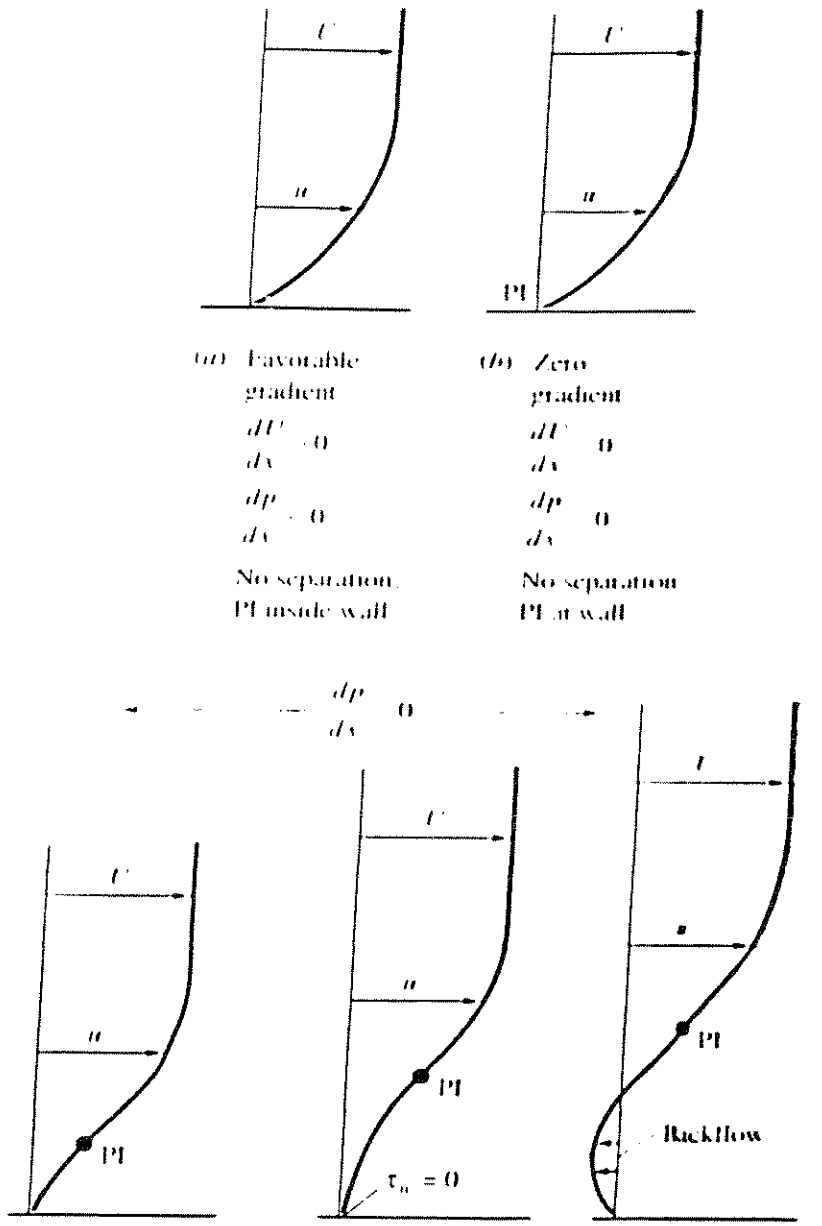
Γιά $f\left(\frac{y}{\Delta(x)}\right)$ λύση, $\eta = \frac{y}{\Delta(x)}$
σταθεροί συντελεστές άν

$$\frac{U^2}{\Delta} \frac{d\Delta}{dx} \sim \frac{1}{2} \frac{\nu U}{\Delta^2} \Rightarrow \Delta^2 = \frac{\nu x}{U} + C$$

και $f f'' + 2 f''' = 0$ + B.C. $f = f' = 0 \quad \eta = 0$

$f' \to 1 \quad \eta \to \infty$





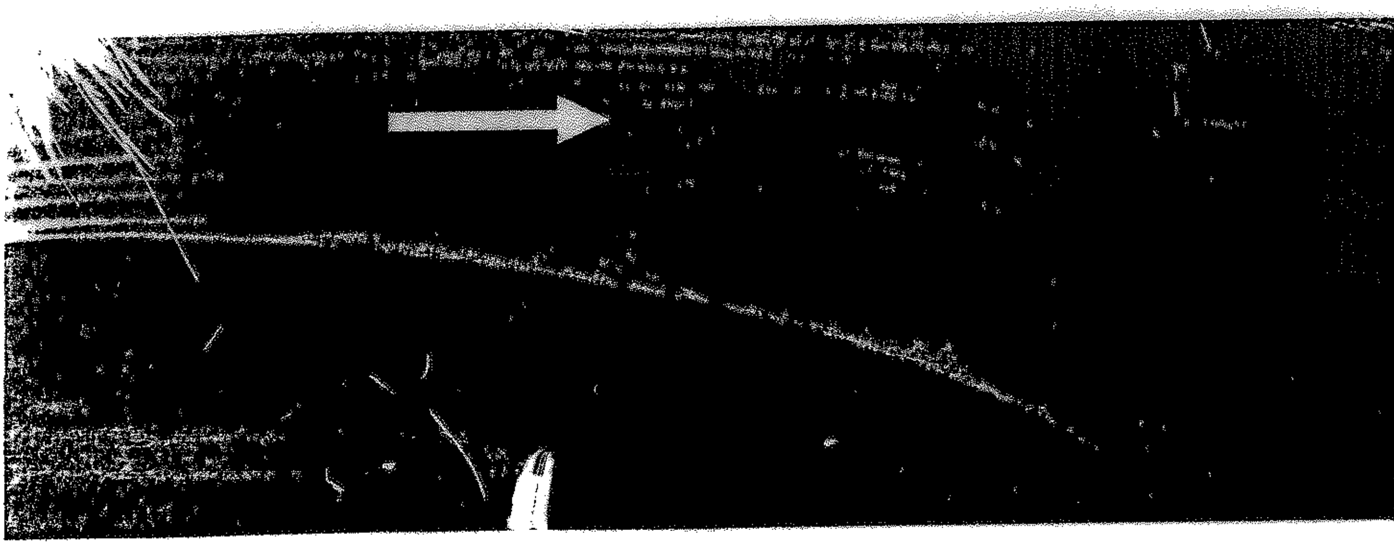
(a) Favorable gradient
$\frac{dU}{dx} > 0$
$\frac{dp}{dx} < 0$
No separation, PI inside wall

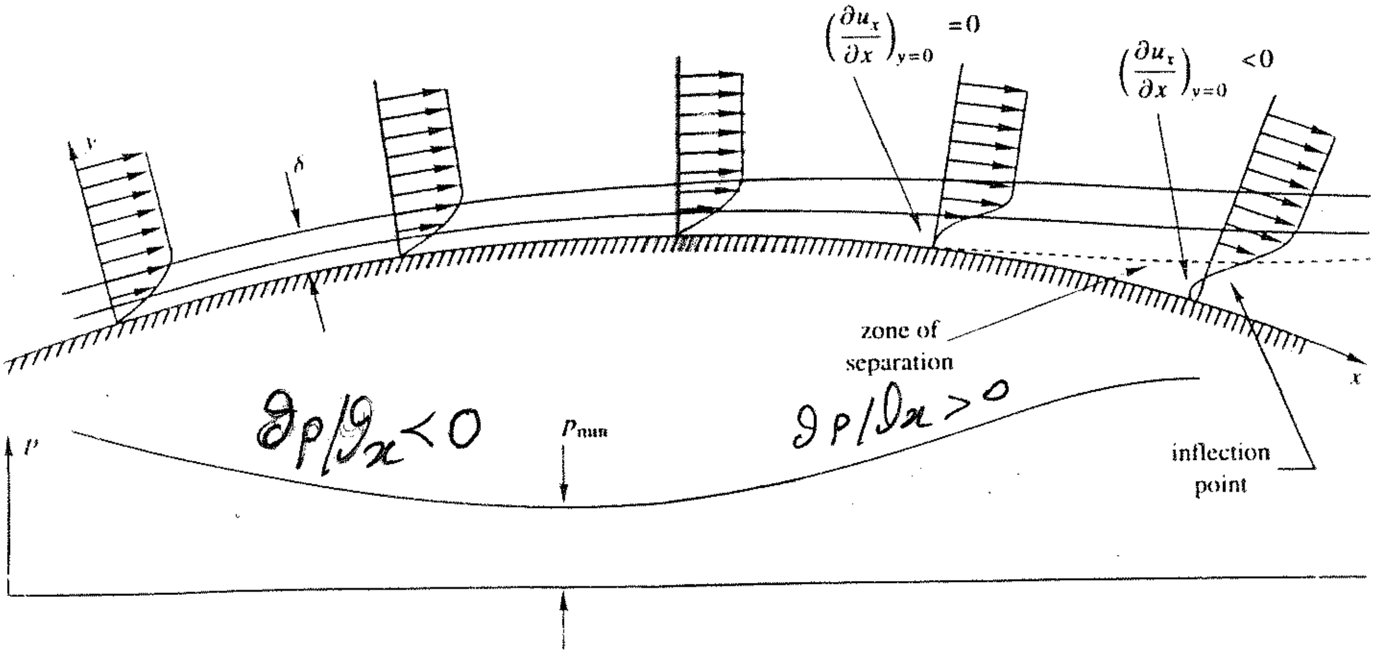
(b) Zero gradient
$\frac{dU}{dx} = 0$
$\frac{dp}{dx} = 0$
No separation PI at wall

(c) Weak adverse gradient:
$\frac{dU}{dx} < 0$
$\frac{dp}{dx} > 0$
No separation, PI in the flow

(d) Critical adverse gradient:
Zero slope at the wall:
Separation

(e) Excessive adverse gradient:
Backflow at the wall:
Separated flow region



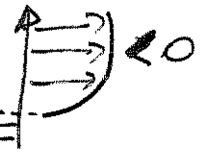


Στην επιφάνεια (επίπεδη) $u=v=0$ για $y=0$.

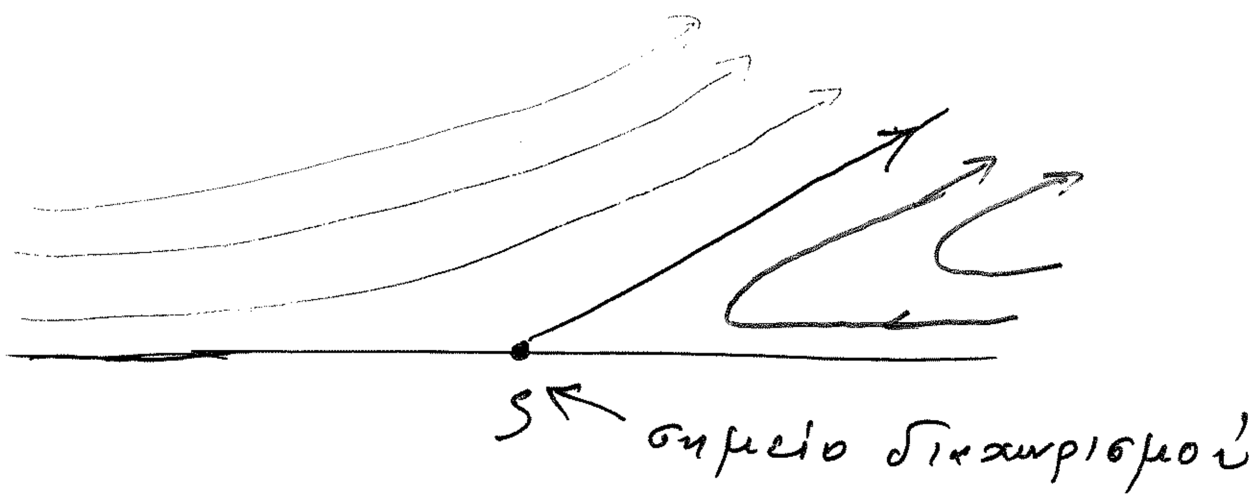
$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}=0$ για $y=0$

$-\frac{dP}{dx}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big| \simeq 0$ στην επιφάνεια.

$\frac{dP}{dx}>0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{y=0}>0$ αλλά <0 για $y>\delta$



Διαχωρισμός ροής



$y = 0 \quad u = 0 \quad v = 0$ για κάθε $x \Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$