Εξίσωση μεταβολής στροβιλισμού

Navier-Stokes (εξίσωση ορμής)

$$(*)\quad \frac{D\vec{u}}{Dt} \equiv \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{u} \times \underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{u})}_{\vec{\zeta}} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}u^2\right) = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P - \frac{1}{\rho}U + \nu\nabla^2\vec{u}$$

$$\vec{\nabla}\times(*) \Rightarrow \frac{\partial\vec{\zeta}}{\partial t} - \vec{\nabla}\times(\vec{u}\times\vec{\zeta}) = -\vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P\right) + \vec{\nabla}\times\left[\nu\nabla^2\vec{u}\right]$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{u}\times\vec{\zeta}) = (\vec{\zeta}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\zeta} + \vec{u}\,\cancel{(\vec{\nabla}\cdot\vec{\zeta})}^{\,0} - \vec{\zeta}\,\cancel{(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})}^{\,0}$$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{\zeta} = 0$ $\quad$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$

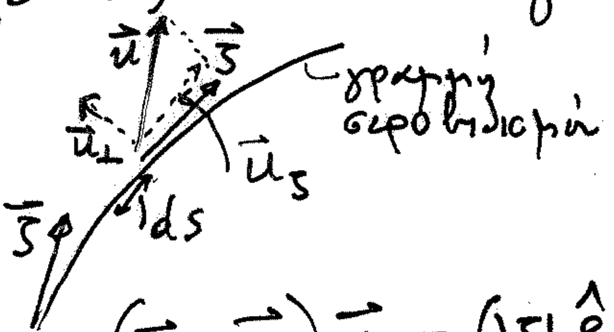
$$-\vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P\right) = \frac{1}{\rho^2}(\vec{\nabla}\rho)\times(\vec{\nabla}P) = 0 \quad \text{αν } \rho(P)$$

$$\frac{D\vec{\zeta}}{Dt} \equiv \underbrace{\frac{\partial\vec{\zeta}}{\partial t} + (u\cdot\vec{\nabla})\vec{\zeta}}_{\text{ρυθμός μεταβολής στροβιλισμού σωματιδίου}} = \underbrace{(\vec{\zeta}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}}_{?} + \underbrace{\nu\nabla^2\vec{\zeta}}_{\text{διάχυση}}$$

? φυσική ερμηνεία

διάχυση στροβιλισμού καθώς κινείται το σωματίδιο

$(\vec{\zeta}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} \equiv 0$ γιά ροή 2D



$$\vec{u} = u_\zeta\hat{e}_\zeta + u_\perp\hat{e}_\perp, \quad \hat{e}_\zeta = \frac{\vec{\zeta}}{|\zeta|}$$

$$(\vec{\zeta}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = (|\zeta|\,\hat{e}_\zeta\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = |\zeta|\frac{d\vec{u}}{ds}$$

$$= |\zeta|\left(\underbrace{\frac{du_\zeta}{ds}\hat{e}_\zeta}_{\text{επιμήκυνση σωλήνα στροβιλισμού}} + \underbrace{\frac{du_\perp}{ds}\hat{e}_\perp}_{\text{στροφή σωλήνα στροβιλισμού}}\right)$$

$$\left[\vec{\nabla}\times(\vec{u}\times\vec{\zeta})\right]_i \xrightarrow{i \text{ συνιστώσα}} \varepsilon_{ijk}\,\partial_j\,(u\times\zeta)_k$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon_{ijk}\,\partial_j\,\epsilon_{klm}\,u_l\,\zeta_m$$

$$\varepsilon_{ijk}\,\epsilon_{klm} = \delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl}$$

$$\left\{\delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl}\right\}\left[(\partial_j u_l)\,\zeta_m + u_l(\partial_j \zeta_m)\right]$$

$$= (\partial_j u_i)\,\zeta_j - (\partial_j u_j)\,\zeta_i + u_i\,(\partial_j \zeta_j) - u_j(\partial_j \zeta_i)$$

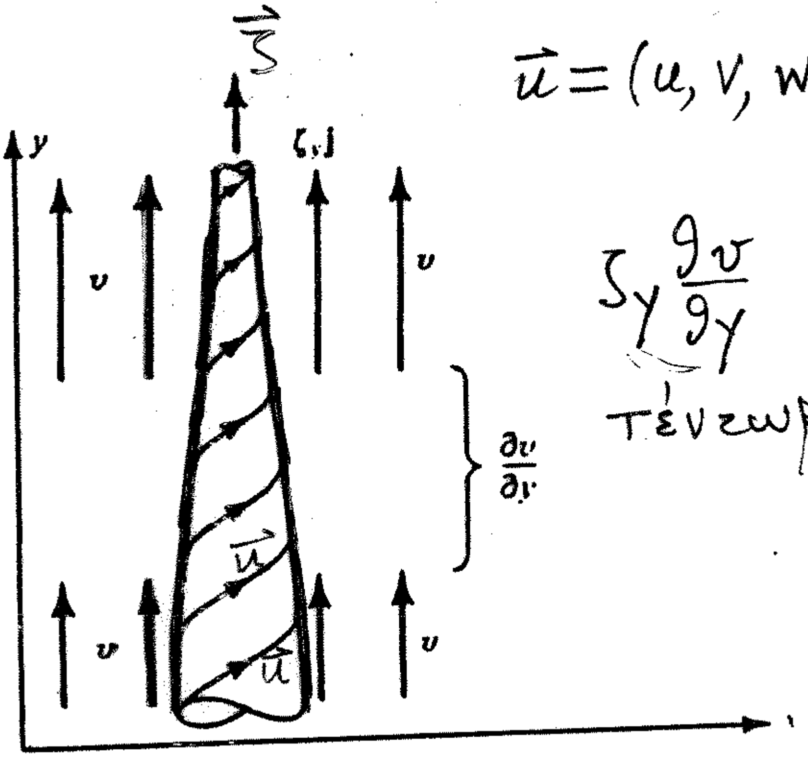
$$(\vec{\zeta}\cdot\vec{\nabla})\,u_i - (\vec{\nabla}\cdot\vec{u})\,\zeta_i + u_i\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{\zeta}) - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\,\zeta_i$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{u}\times\vec{\zeta}) = (\vec{\zeta}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{u} - (\vec{\nabla}\cdot\vec{u})\,\vec{\zeta} + (\vec{\nabla}\cdot\vec{\zeta})\,\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{\zeta}$$

y-συνιστώσα

$$\frac{D\zeta_y}{Dt} = \zeta_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \zeta_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \zeta_z \frac{\partial u_y}{\partial z} + \nu \nabla^2 u_y$$

τέντωμα στροβίλου — στροφή — στροφή — διάχυση



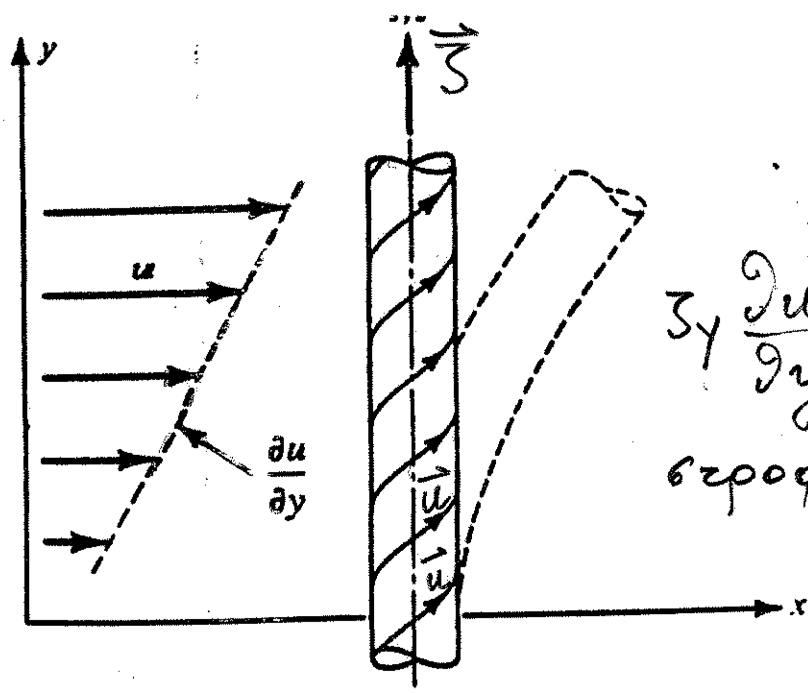
$\vec{u} = (u, v, w)$

$\zeta_y \frac{\partial v}{\partial y}$

τέντωμα

$\zeta_y \neq 0$

βαθμίδα ∥ $\widetilde{v}$ y-συνιστώσα στην y-κατεύθυνση



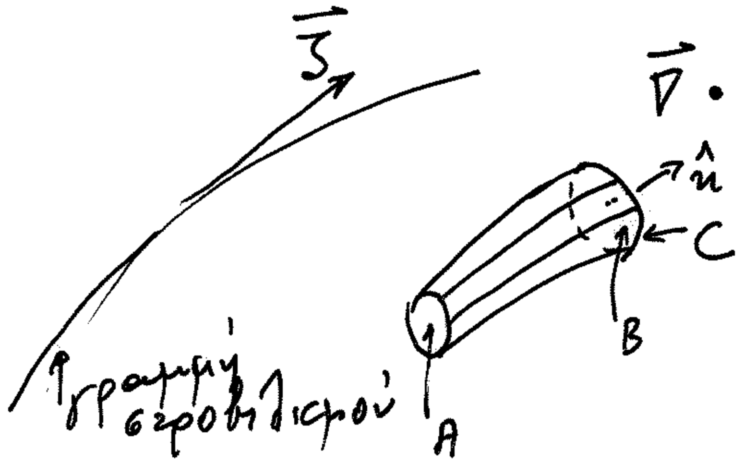
$\zeta_y \neq 0$

βαθμίδα ⊥ ταχύτητα στην ∥ κατεύθυνση

$\zeta_y \frac{\partial u}{\partial y}$

στροφή

Θεώρημα Κυκλοφορίας Kelvin



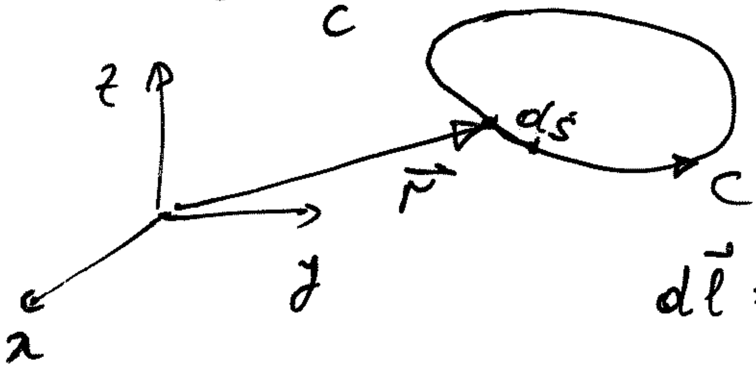
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\zeta}=0 \Leftarrow \vec{\zeta}=\vec{\nabla}\times\vec{u}$$

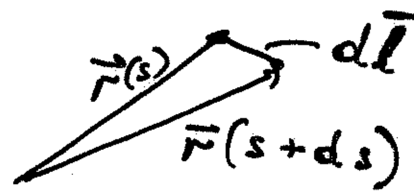
$$\Downarrow$$

$$\int_A \vec{\zeta}\cdot d\vec{S} = \int_B \vec{\zeta}\cdot dS = \oint_C \vec{u}\cdot d\vec{l}$$

κυκλοφορία

$$\frac{DK}{Dt} = \frac{D}{Dt}\oint_C \vec{u}\cdot d\vec{l} = \frac{D}{Dt}\oint \vec{u}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial s}\,ds$$





$$d\vec{l} = \vec{r}(s+ds)-\vec{r}(s) = \frac{\partial\vec{r}}{\partial s}\,ds$$

$\vec{r} \rightarrow \vec{q}(t)$ - θέση αντίστοιχου σωματιδίου

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial\vec{q}}{\partial t} \rightarrow \vec{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}\cdot\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial s\,\partial t} \rightarrow \vec{u}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial s} = \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial s}$$

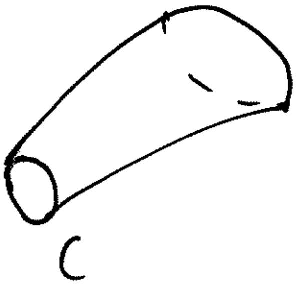
$$\frac{DK}{Dt} = \oint_C \frac{D\vec{u}}{Dt}\cdot d\vec{l} + \oint_C \vec{u}\cdot\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial t\,\partial s}\,ds = 0$$

Αν α) ανιξωδικό ρευστό $\nu=0$

β) διατηρητικές δυνάμεις όγκου $\vec{f}=-\vec{\nabla}U$

γ) ομογενής πυκνότητα

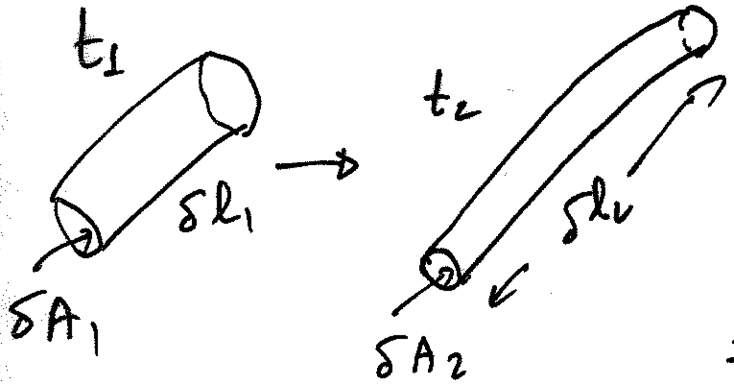
Διατήρηση κυκλοφορίας



α) κυκλοφορία είναι υλική ποσότητα

β) σωλήνες στροβιλισμού κινούνται με την ροή.

γ) ένταση στροβίλων διατηρείται



Kelvin $\Rightarrow \zeta_1 \delta A_1 = \zeta_2 \delta A_2$

συνέχεια $\rho = \sigma\tau\alpha\theta$ $\quad \delta l_1 \delta A_1 = \delta l_2 \delta A_2$

$$\Rightarrow \frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \frac{\delta l_1}{\delta l_2}$$ τέντωμα γραμμής στροβιλισμού

Διανυσματικό πεδίο ταχύτητας

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{u}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad 3D$$

επιπλέον συνθήκη $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$

$$\left.\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{u} &= \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\zeta}\\ &\vec{\nabla}(\cancel{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}}) - \nabla^2\vec{A}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\nabla^2\vec{A} = -\vec{\zeta}}$$

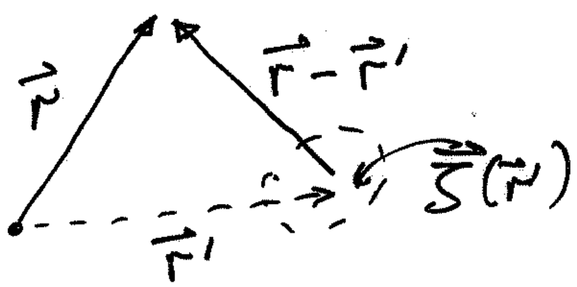
λύση Poisson

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V_\infty}\frac{\vec{\zeta}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d\vec{r}'$$

$$\boxed{\vec{u}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_{\vec{r}}\times\vec{A} = \frac{1}{4\pi}\int_{V_\infty}\frac{\vec{\zeta}(\vec{r}')\times\hat{n}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\,d\vec{r}'}$$

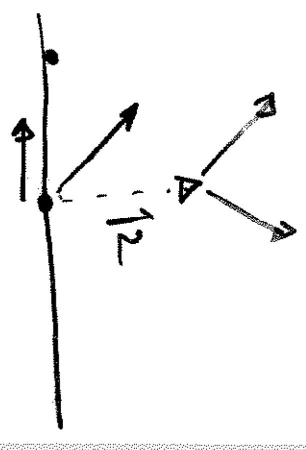
Biot + Savard

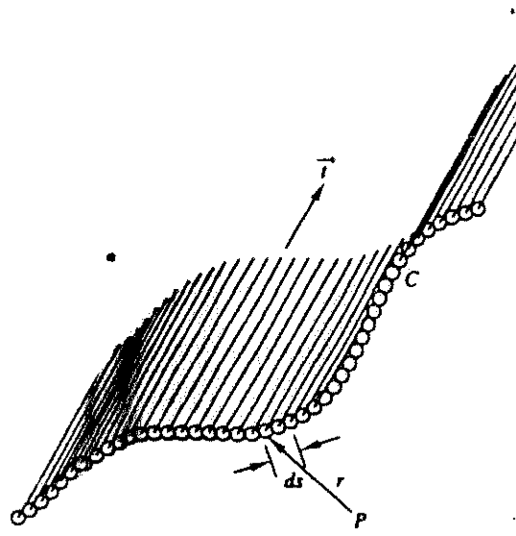
διότι $\vec{\nabla}_{\vec{r}}\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\hat{n}$, $\hat{n} = \dfrac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$



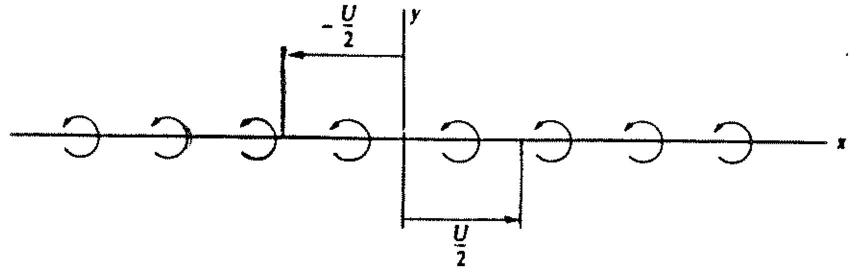
$\vec{r}-\vec{r}'$

Π.χ. ευθύγραμμος στρόβιλος $\vec{\zeta}(\vec{r}') = \zeta_0\delta(\vec{R}')$

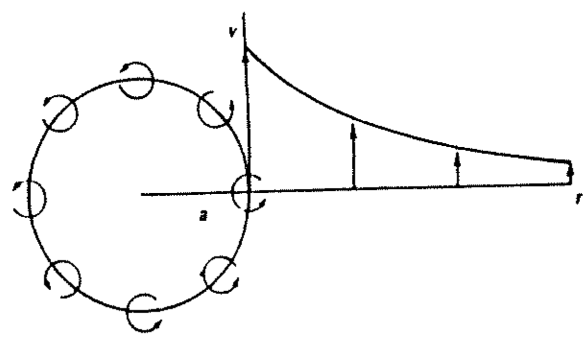




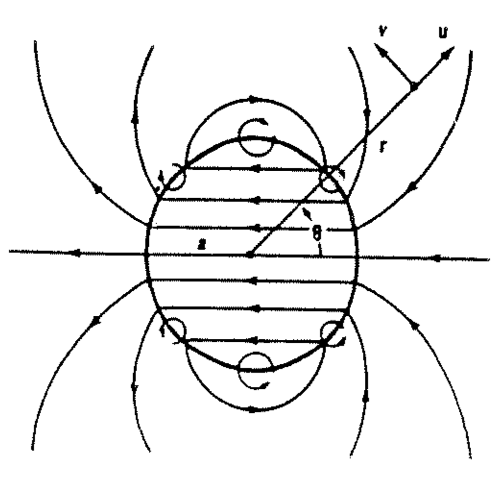
t
C
ds
r
P



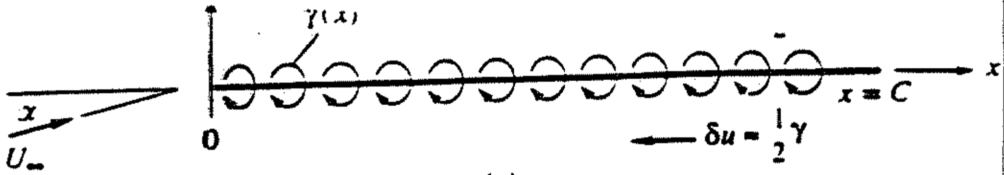
$-\frac{U}{2}$
y
x
$\frac{U}{2}$



v
a
r

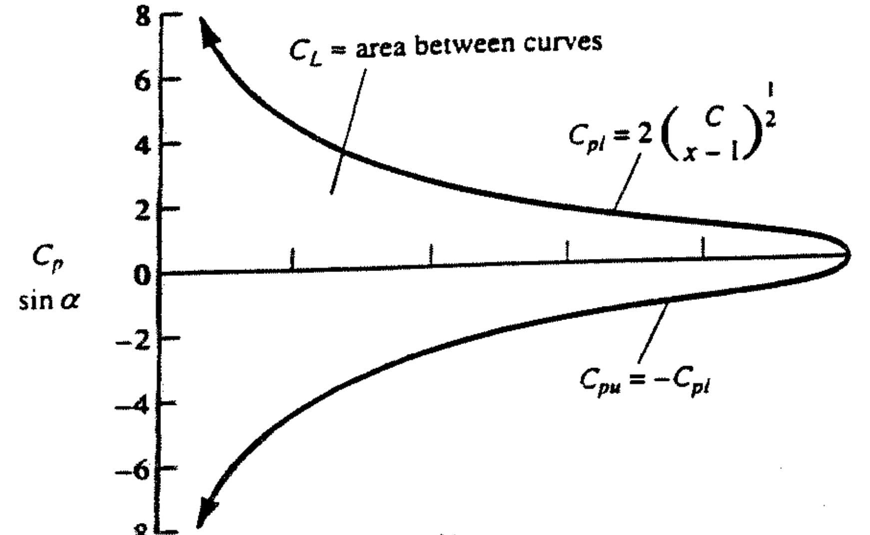


v
u
r
θ
a



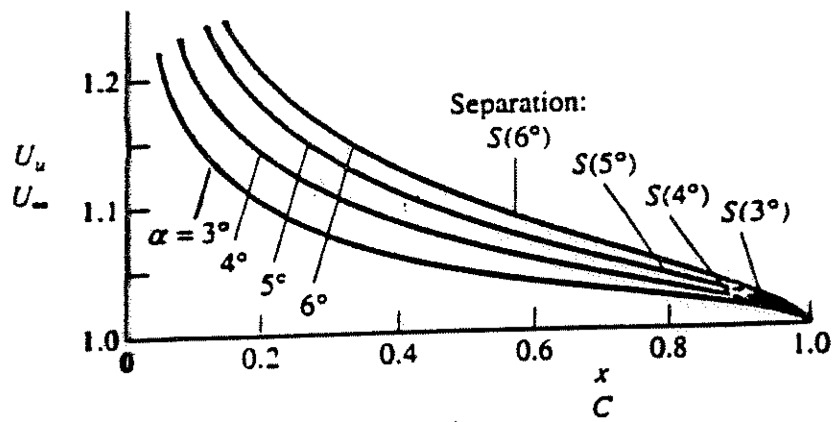
γ(x)
x
U∞
0
x = C
δu = ½γ

(a)



C_L = area between curves
C_pl = 2 (C / x − 1)^½
C_pu = −C_pl
C_p / sin α
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8

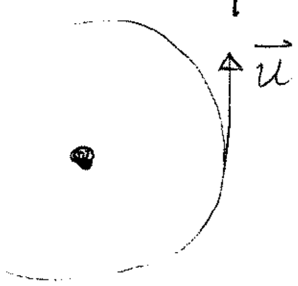
(b)



Separation:
S(6°)
S(5°)
S(4°)
S(3°)
α = 3°
4°
5°
6°
U_u / U∞
1.2
1.1
1.0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x / C

(c)

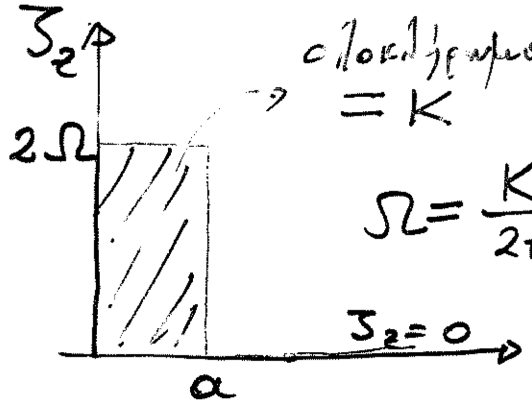
Ελεύθερος στρόβιλος



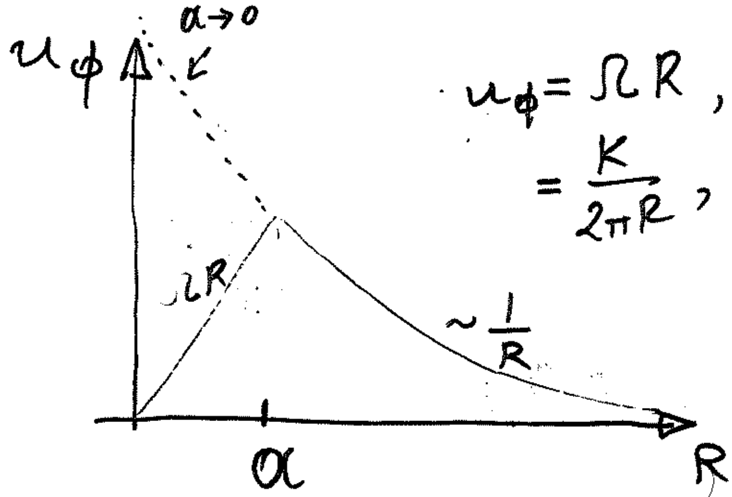
$$u_\phi = \frac{K}{2\pi R} \qquad \vec{\zeta} = K\,\delta(\vec{R})\,\hat{e}_z$$

$$P(R) = -\frac{1}{2}\rho\left(\frac{K}{2\pi R}\right)^2 \quad \text{από Bernoulli}$$

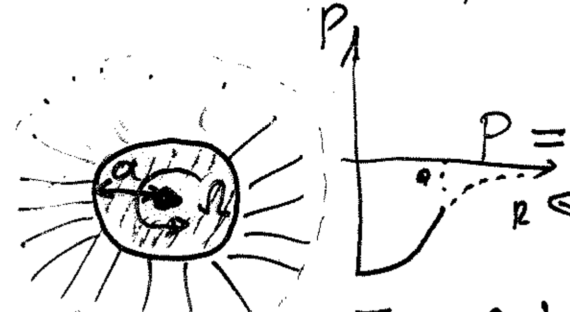
Μοντέλλο Rankine



$$\Omega = \frac{K}{2\pi a^2}$$



$$u_\phi = \Omega R\,,\ R<a$$
$$= \frac{K}{2\pi R}\,,\ R>a$$



$$P = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{K}{2\pi a^2}\right)^2\left(R^2 - 2a^2\right) \qquad R<a$$

από διατήρηση ορμής

Παραλείψαμε διάχυση + ιξώδες.

Γιά πεπερασμένου μήκους στρόβιλο

$$\left.\begin{array}{l} L \to L + \delta L \\ a \to a - \delta a \end{array}\right\} \text{ώστε } L a^2 = \text{σταθερό} \ \text{(διατήρηση μάζας)}$$

$$a^2 \delta L - 2aL\,\delta a = 0 \ \Rightarrow \ \frac{\delta a}{\delta L} = +\frac{a}{2L}$$

επίσης $\Omega a^2 = \text{σταθ}$ – διατήρηση ολικού στροβιλισμού

$\Rightarrow$ αύξηση $\Omega \Rightarrow$ αύξηση περιστροφικής κινητικής ενέργειας

$$K.E = \frac{1}{2}\int_{0}^{R_m} u_\phi^2\,(2\pi R)\,dR = \frac{\rho K^2 L}{4\pi}\left[\frac{1}{4} + \ln\frac{R_m}{a}\right]$$

Μεταβολή λόγω δL και δa
παραγώγιση ως προς L με $\frac{da}{dL} = \frac{a}{2L}$

$$\Rightarrow \frac{\rho K^2}{4\pi}\left[\frac{3}{4} + \ln\frac{R_m}{a}\right]$$

Τό έργο πού απαιτείται γίνεται από την πίεση γιά μονάδα επιμήκυνση. Η ολική δύναμη πού ασκείται στήν επιφάνεια του εδάφους είναι

$$\int_0^{R_m} p\,(2\pi R)\,dR = \frac{\rho K^2}{4\pi}\left\{\int_0^{a}\left(\frac{R^3}{a^4} - 2\frac{R}{a^2}\right)dR - \int_a^{R_m}\frac{dR}{R}\right\}.$$

= μεταβολή κινητικής ενέργειας ανά μονάδα επιμήκυνσης.

Ασυνέχεια στόν στροβιλισμό
Εάν επιτρέψουμε δράση ιξώδους έχουμε διάχυση και a αυξάνει με t.

Εχουμε μόνο εφαπτομενική ταχύτητα
Στόν ανεμοστρόβιλο έχουμε ροή πρός άξονα

Πηγή + ελεύθερο στρόβιλο $\Rightarrow \vec{u} = u_R\hat{e}_R + u_\phi\hat{e}_\phi$
$-Q$ $\quad K$

$$\Phi(R,\phi) = \frac{Q}{2\pi}\ln R - \frac{K}{2\pi}\phi \longleftrightarrow \Psi(R,\phi) = \frac{Q\phi}{2\pi} + \frac{K}{2\pi}\ln R$$

$$p = -\frac{\rho}{8\pi^2}\left(Q^2 + K^2\right)\frac{1}{R^2}$$

ιξώδες $\rightarrow$ απειροπισμό απόκλισης + στροβιλισμού

Μόνιμος στρόβιλος Burgers

Λόγω ιξώδους $\Rightarrow a(t)$

Εσωτερικό στροβίλου – γωνιακή ταχύτητα Ω

Ροπή γύρω από z-άξονα σε ακτίνα R
(ανά μονάδα ύψους)

$$R\,(2\pi R)\,\tau_{R\phi} = 2\pi\eta R^3 \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{u_\phi}{R}\right)$$

Περιορισμός διάχυσης λόγω εισροής προς τον άξονα. $\vec{u}(R,z)$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R u_R)+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

Πιθανή λύση

$$u_R=-\frac{1}{2}\alpha R \quad , u_z=\alpha z \quad , u_\phi=u_\phi(R)$$

$$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\zeta} \qquad \Rightarrow \zeta_z(R)=\frac{1}{R}\frac{d}{dR}(R u_\phi)$$

u_R - συνιστώσα μαζεύει τον στροβιλισμό προς τον άξονα. $u_R\cdot\frac{\partial}{\partial R}\zeta_z \Rightarrow u_R$!!

$(\vec{\zeta}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$

u_z - επιμηκύνει ενός σωλήνα στροβιλισμού στην z-κατεύθυνση $\zeta_z\frac{\partial}{\partial z}u_z$ u_z!!

Εξίσωση στροβιλισμού (μόνιμη ροή)

$$-(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\zeta}+(\vec{\zeta}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}+\nu\nabla^2\vec{\zeta}=0$$

αντιστάθμιση διάχυσης

$$u_R\frac{\partial}{\partial R}\zeta_z+\zeta_z\frac{\partial u_z}{\partial z}+\nu\nabla^2\zeta_z=0 \qquad \zeta_z(R\to\infty)=0$$

$$+\frac{1}{2}\alpha R\frac{\partial}{\partial R}\zeta_z+\alpha\zeta_z+\nu\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\zeta_z}{\partial R}\right)=0$$

Πολλαπλασιασμός με R και ολοκλήρωση

$$\alpha\frac{d}{dR}\left[\frac{R^2}{2}\zeta_z\right]+\nu\frac{d}{dR}\left(R\frac{\partial\zeta_z}{\partial R}\right)=0 \Rightarrow -\frac{\alpha}{2}R\zeta_z=\nu\frac{\partial\zeta_z}{\partial R}$$

$$\vec{\zeta}=\frac{\alpha K}{4\pi\nu}e^{-\alpha R^2/4\nu}\hat{e}_z$$ - ανεξάρτητη του t

Ολική ροή στροβιλισμού (κυκλοφορία)

$$\int \vec{\zeta} \cdot d\vec{S} = 2\pi \int_0^{\infty} \zeta_R \, R \, dR = K.$$

αλλά συγκεντρωμένος σε ακτίνα $R_0 = \sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}$

$$u_\phi(R) = \frac{K}{2\pi R}\left(1 - e^{-\alpha R^2/4\nu}\right)$$

Πρόβλημα $u_R \to \infty$ $R \to \infty$

Figure 4.15 **A tornado.**
[Photograph by courtesy of the National Oceanic and Atmospheric Administration Photo Library, Rockville, Maryland, USA.]