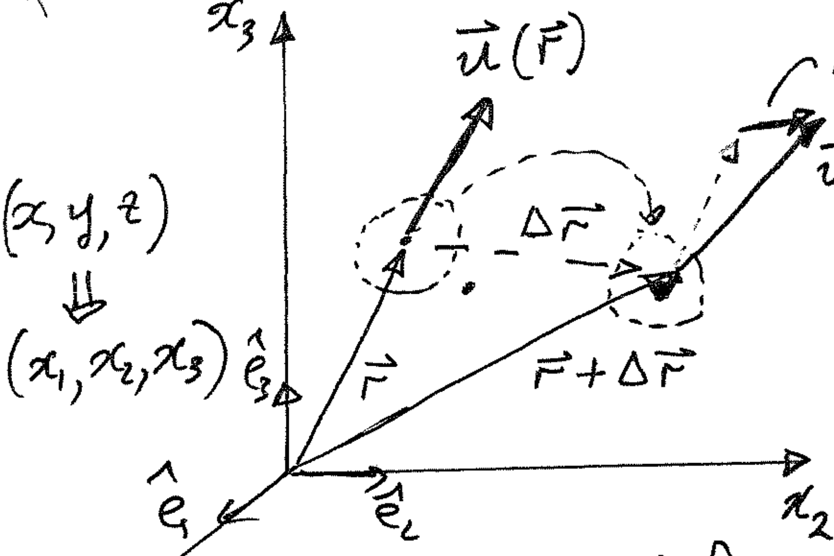
Κεφ. 6α Τανυστής Ρυθμού παραμόρφωσης

$$\vec{u}(\vec{r}) \Longrightarrow \vec{u}(\vec{r}+\Delta\vec{r})$$



$$\vec{u}(\vec{r}+\Delta\vec{r}) \equiv u(\vec{r}) + \Delta\vec{u}(\vec{r})$$

(x, y, z)

$\Downarrow$

(x_1, x_2, x_3)

$\Delta\vec{r}$ - μικρό

$$\Delta\vec{r} = \Delta x_1 \hat{i} + \Delta x_2 \hat{j} + \Delta x_3$$

$$\equiv \sum_i (\Delta x_i)\, \hat{e}_i$$

$$\vec{u}(\vec{r}) = \sum_i u_i(\vec{r})\, \hat{e}_i$$

$\vec{u}(\vec{r}+\Delta\vec{r})$ - ανάπτυγμα Taylor στο $\vec{r}$

$$\vec{u}(\vec{r}+\Delta\vec{r}) = \vec{u}(\vec{r}) + \underbrace{\sum_j \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}\bigg|_{\vec{r}} \cdot \Delta x_j}_{\Delta\vec{u}(\vec{r})}$$

$$\Delta\vec{u}(\vec{r}) = \sum_j \frac{\partial \vec{u}(\vec{r})}{\partial x_j} \cdot \Delta x_j$$

τανυστής βαθμίδας ταχύτητας

i - συνιστώσα $\quad \Delta u_i(\vec{r}) = \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta x_j$

$$\Delta u_i(\vec{r}) = \sum_j \Big\{ \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\dot{\varepsilon}_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\Omega_{ij}}$$

$\dot{\varepsilon}_{ij}$ τανυστής ρυθμού παραμόρφωσης $\qquad \Omega_{ij}$ - περιστροφ

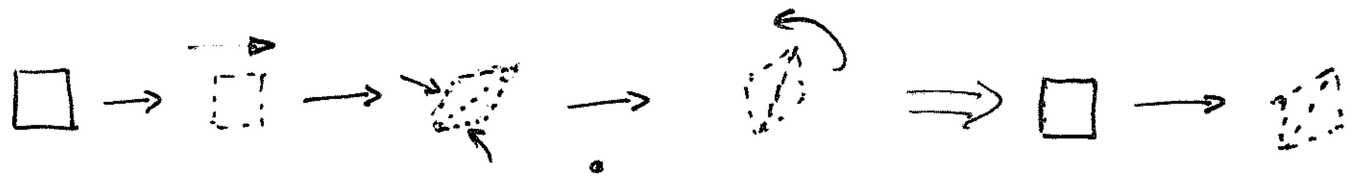
$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ji} \qquad \Omega_{ji} = -\Omega_{ij}$

$i, j = 1, 2, 3 \qquad$ συμμετρικός $\qquad$ αντισυμμετρι

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \underset{6}{\dot{\epsilon}_{ij}} + \underset{3}{\Omega_{ij}} \qquad \text{τανυστές}$$

$$u_i(\vec r+\Delta\vec r)=\underset{\uparrow}{u_i(\vec r)}+\sum_j\underset{\uparrow}{\dot\varepsilon_{ij}}\Delta x_j+\sum_j\underset{\uparrow}{\Omega_{ij}}\Delta x_j$$

μετατόπιση συνολική   πραγματική παραμόρφωση   περιστροφή



$t=0$ $t=\Delta t$

δx_i

$x_i \qquad x_i+\delta x_i \quad \Rightarrow \quad x_i \qquad x_i+\delta x_i$

$x_i+u_i(\vec r)t \qquad x_i+\delta x_i+u_i(\vec r+\delta\vec r)t$

$$\delta x_i(\Delta t)=\delta x_i+\Delta t\left[u_i(\vec r+\delta\vec r)-u_i(\vec r)\right]$$

$$\frac{D\delta x_i}{Dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\delta x_i(\Delta t)-\delta x_i(t=0)}{\Delta t}=u_i(\vec r+\delta\vec r)-u_i(\vec r)$$

$$=\delta u_i$$

$$=\sum_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta x_j$$

Μόνο $\delta x\neq 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{D\delta x}{Dt}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\delta x \Rightarrow \underset{\dot\varepsilon_{xx}}{\underset{\uparrow}{\dfrac{\partial u}{\partial x}}}=\dfrac{1}{\delta x}\dfrac{D\delta x}{Dt}$

Διαγώνια στοιχεία ε_{ii}

$\dot\varepsilon_{xx}$ → τέντωμα ή συρρίκνωση στην x

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\delta y}\frac{D\delta y}{Dt}$$

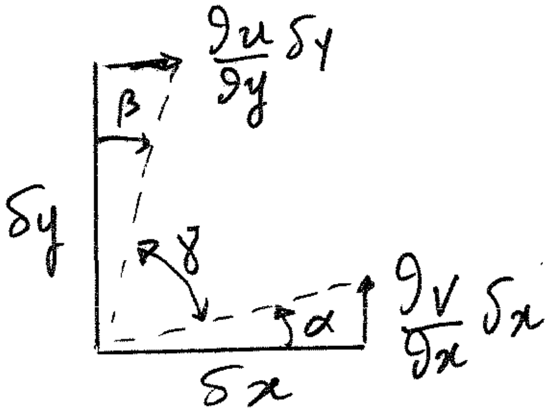
$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{\delta z}\frac{D\delta z}{Dt}$$

$$\sum_i\dot\varepsilon_{ii}=\dot\varepsilon_{xx}+\dot\varepsilon_{yy}+\dot\varepsilon_{zz}=\vec\nabla\cdot\vec u\equiv\Delta$$

$$\Delta=\frac{1}{\delta V}\frac{D\delta V}{Dt}=\frac{1}{\delta x\delta y\delta z}\frac{D}{Dt}(\delta x\delta y\delta z)$$

$$=\frac{1}{\delta x\delta y\delta z}\left[\delta y\delta z\frac{D\delta x}{Dt}+\delta x\delta z\frac{D\delta y}{Dt}+\delta x\delta y\frac{D\delta z}{Dt}\right.$$

Μή διαγώνια στοιχεία $\dot{\epsilon}_{ij}$



$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{v(x+\delta x)-v(x)}{\delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)$$

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{D\beta}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{D\gamma}{Dt} = -\frac{D}{Dt}(\alpha+\beta) = -\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -2\dot{\epsilon}_{12}$$

Διαγώνια στοιχεία $\dot{\epsilon}_{ii}$ → ρυθμός μεταβολής όγκου, μηκών

Μή " " $\dot{\epsilon}_{ij}$ → " γωνιών

Μπορούμε νά βρούμε σύστημα αναφοράς όπου ο πίνακας τού τανυστή $\{\epsilon_{ij}\}$ είναι διαγώνιος.

Άξονες τού συστήματος → κύριοι άξονες

Έτσι γιά τό σύστημα αυτό έχουμε μόνο τέντωμα καί συρρίκνωση.

Δυστυχώς σέ κάθε σημείο άλλο προσανατολισμ

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \underbrace{\overbrace{\frac{1}{3}\Delta}^{\text{Άθροισμα διαγωνίων} = \Delta}\delta_{ij}}_{\text{ισοτροπική μεταβολή}} + \underbrace{\left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\Delta\delta_{ij}\right)}_{\text{Ανισοτροπική μεταβολή σχήματος. Διατηρεί τήν όγκο.}}$$

αρυνσης περιστροφής $\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

$$\begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12} & -\Omega_{31} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & -\Omega_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{\omega} = (\Omega_{23}, \Omega_{31}, \Omega_{12})$

$\Omega_{ij} = \sum_k \epsilon_{ijk}\omega_k$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{δύο δείκτες ίδιοι} \\ 1 & i,j,k \text{ άρτια μετάθεση } 1,2,3 \\ -1 & \text{'' περιττή '' ''} \end{cases}$$

$$\omega_i = \frac{1}{2}\sum_{jk}\epsilon_{ijk}\Omega_{jk} \Rightarrow \vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{u}$$

περιστροφής

$$\Delta\vec{u} = \sum_i \Delta u_i \hat{e}_i = \sum_{ij} \hat{e}_i \Omega_{ij}\Delta x_j$$

$$= \sum_{ijk} \underbrace{\Delta x_j\, \epsilon_{ijk}\,\omega_k}_{(\Delta\vec{r}\times\vec{\omega})_i} \hat{e}_i \equiv \Delta\vec{r}\times\vec{\omega}$$

$$(\Delta\vec{r}\times\vec{\omega})_i = \sum_{jk}\epsilon_{ijk}\Delta x_j\,\omega_k.$$

$$(\Delta\vec{r}\times\vec{\omega})_1 = \epsilon_{123}\Delta x_2\omega_3 - \epsilon_{123}\Delta x_3\omega_2 = (\Delta x_2\omega_3 - \Delta x_3\omega_2)$$

$$\Delta\vec{u} = \sum_j \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}\Delta x_j = \underbrace{\sum_j \left(\Delta x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)}_{(\Delta\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}}\vec{u} =$$

6.3.1 Τανυστής ρυθμού παραμόρφωσης σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Προβλήματα με κυλινδρική συμμετρία απλοποιούνται σημαντικά αν χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες. Αυτό προυποθέτει ότι μπορούμε να εκφράσουμε και τον τανυστή παραμόρφωσης σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Αυτό είναι εύκολο αν αρχήσουμε από την σχέση (13) δηλ.

$$\vec{\Delta u}(\vec{r}) = (\vec{\Delta r}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}, \tag{28}$$

όπου πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε τον τελεστη $(\vec{\Delta r}\cdot\vec{\nabla})$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες και στην συνέχεια να δράσει στην ταχύτητα $\vec{u}$ εκφρασμένη επίσης σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\vec{u} = u_r\hat{e}_r + u_\phi\hat{e}_\phi + u_z\hat{e}_z.$$

Εδώ να θυμήσουμε ότι τα μοναδιαία διανύσματα έχουν εξάρτηση απο τις συντεταγμένες, όσο αφορά την κατεύθυνση, σε αντίθεση με τις καρτεσιανές. Στη συνέχεια σε αναλογία με τις καρτεσιανές συντεταγμένες προσπαθούμε να ξεχωρίσουμε τους όρους με το ίδιο μοναδιαίο διάνυσμα και να γράψουμε

$$\vec{\Delta u}(\vec{r}) = (\vec{\Delta r}\ \ \vec{\nabla})\vec{u} \tag{29}$$

$$= \Delta q_j\ \ u_{ij}\ \ \hat{e}_i, \tag{30}$$

όπου Δq_j είναι το μήκος που αντιστοιχεί στην μεταβολή της j κυλινδρικής συντεταγμένης δηλ. Δr, $r\Delta\phi$, Δz αντίστοιχα για r, ϕ, z. Τα στοιχεία του τανυστή u_{ij} ορίζουν την μεταβολή της ταχύτητας για μικρή μετατόπιση και δίνονται στον πίνακα

$$\{u_{ij}\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} & \frac{\partial u_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \phi} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{31}$$

Οπως και προηγουμένως διαχωρίζουμε τον τανυστή u_{ij} σε συμμετρικο

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji}) \tag{32}$$

και αντισυμμετρικό μέρος

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{ij} - u_{ji}\right).$$

Τα ανεξάρτητα στοιχεία του τανυστή παραμόρφωσης είναι

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

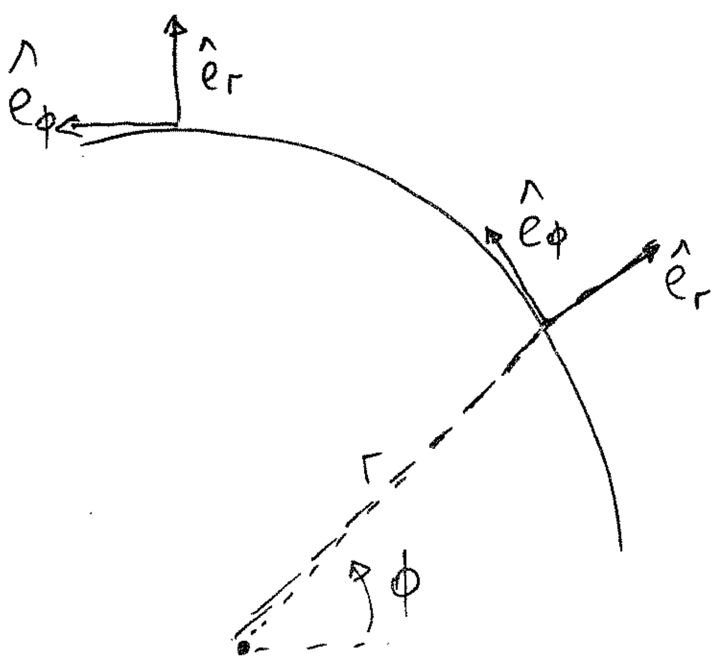
$$\dot{\varepsilon}_{r\phi} = \dot{\varepsilon}_{\phi r} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r}\right)$$

$$\dot{\varepsilon}_{rz} = \dot{\varepsilon}_{zr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\phi\phi} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{2u_r}{r}\right)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\phi,z} = \dot{\varepsilon}_{z,\phi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial z}\right)$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$



$$\hat{e}_r = \cos\phi\, \hat{i} + \sin\phi\, \hat{j}$$

$$\hat{e}_\phi = -\sin\phi\, \hat{i} + \cos\phi\, \hat{j}$$

6.3.2 Τανυστής παραμόρφωσης σε σφαιρικές συντεταγμένες

Εδώ απλώς παραθέτουμε τις αντίστοιχες σχέσεις για σφαιρικές συντεταγμένες

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\dot{\varepsilon}_{r\theta} = \dot{\varepsilon}_{\theta r} = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)$$

$$\dot{\varepsilon}_{r\phi} = \dot{\varepsilon}_{\phi r} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\phi}{r}\right)\right]$$

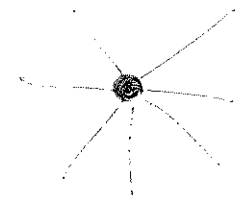
$$\dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r}\right)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\theta\phi} = \dot{\varepsilon}_{\phi\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{u_\phi}{\sin\theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}\right]$$

$$\dot{\varepsilon}_{\phi\phi} = \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta\cot\theta}{r}\right)$$

Παραδείγματα ρυθμού παραμόρφωσης

A) Γραμμική πηγή $u_R = \dfrac{Q}{2\pi R}$



$$\dot{\varepsilon}_{RR} = \frac{\partial u_R}{\partial R} = -\frac{Q}{2\pi R^2}$$

$$\dot{\varepsilon}_{\phi\phi} = \frac{1}{R}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_R}{R} = \frac{Q}{2\pi R^2}$$

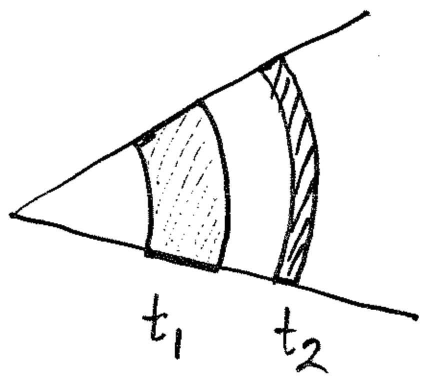
$\dot{\varepsilon}_{RR} + \dot{\varepsilon}_{\phi\phi} = 0$ ασυμπί

$$\dot{\varepsilon}_{R\phi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u_R}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r}\right) =$$

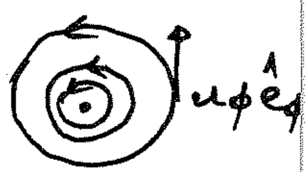
δέν έχουμε μεταβολ γωνιών

$\Omega_{ij} = 0$ δέν έχουμε περιστροφή $(\nabla \times \vec{u} = 0)$

$$\dot{\varepsilon} = \begin{pmatrix} -\frac{Q}{2\pi R^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Q}{2\pi R^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



B) Γραμμικός στρόβιλος $u_\phi = \dfrac{K}{2\pi R}$

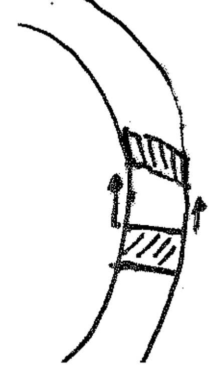


$\dot{\varepsilon}_{RR} = \dot{\varepsilon}_{\phi\phi} = 0$ σταθερά μήκη $\Rightarrow$ ασυμπίεστο

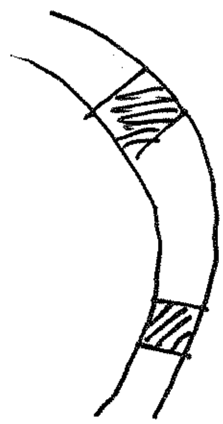
$\dot{\varepsilon}_{R\phi} = \frac{1}{2}\left(-\frac{u_\phi}{R} + \frac{\partial u_\phi}{\partial R}\right) = -\frac{K}{2\pi R^2} \Rightarrow$ μεταβολή γωνιών όχι εμβαδού

$\Omega_{R\phi} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_\phi}{R} + \frac{\partial u_\phi}{\partial R}\right) = 0$ όχι περιστροφή

$$\dot{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{K}{2\pi R^2} & 0 \\ -\frac{K}{2\pi R^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Γ) $u_\phi = \omega r$ (περιστροφή δοχείου)



$$\left.\begin{array}{l}\dot{\varepsilon}_{RR} = \dot{\varepsilon}_{\phi\phi} = 0 \end{array}\right\} \text{όχι μεταβολή μηκών}$$

$$\left.\dot{\varepsilon}_{R\phi} = 0 \right\} \text{όχι μεταβολή γωνιών}$$

$$\Omega_{r\phi} = \omega$$

Δ) Δίπολο ροής

$R \gg \alpha$

$$u_r = \frac{\mu}{2\pi R^2}\cos\phi$$

$$u_\phi = \frac{\mu}{2\pi R^2}\sin\phi$$

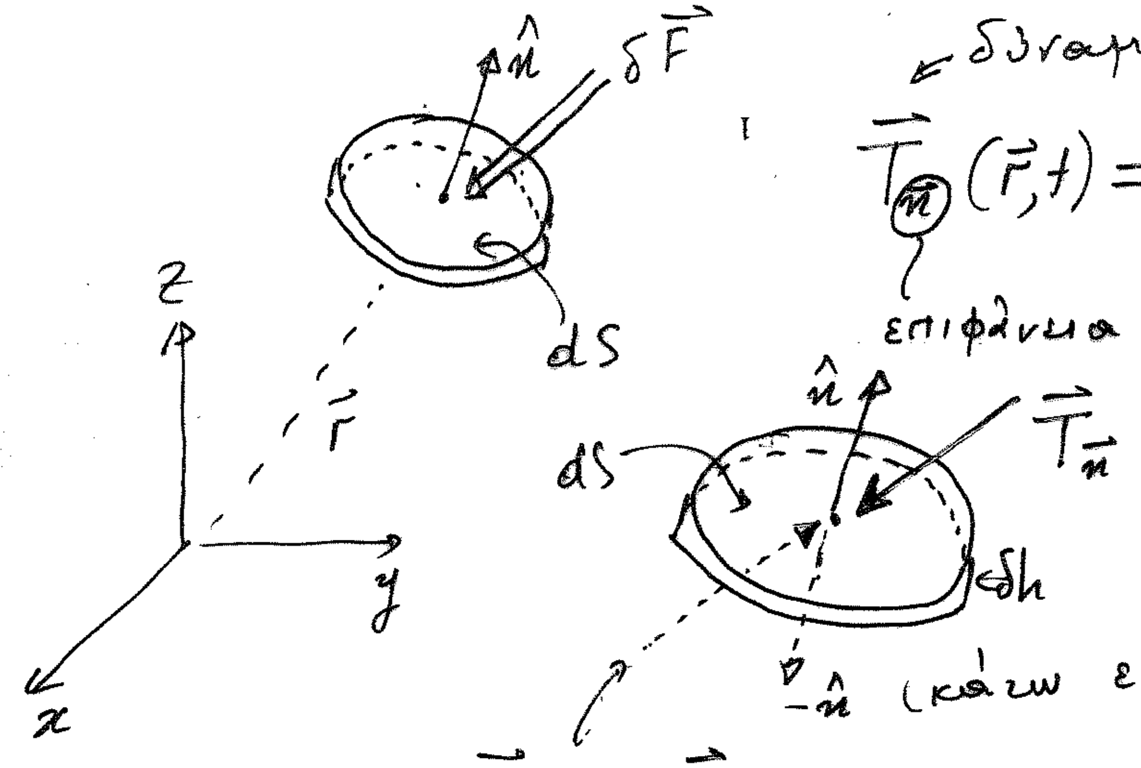
$$\dot{\varepsilon}_{RR} = -\frac{2\mu}{2\pi R^3}\cos\phi \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon}_{RR} + \dot{\varepsilon}_{\phi\phi} = 0$$

ασυμπίεστη

$$\dot{\varepsilon}_{\phi\phi} = \frac{2\mu}{2\pi R^3}\cos\phi$$

$$\dot{\varepsilon}_{R\phi} = -\frac{\mu}{\pi R^3}\sin\phi$$

$$\Omega_{R\phi} = 0$$



← δύναμη/επιφάνεια

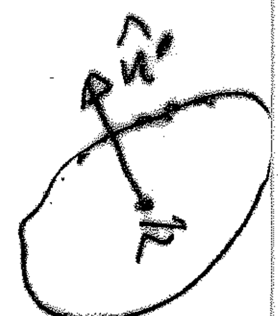
$$\vec T_{\hat n}(\vec r,t) = \lim_{\delta S\to 0}\frac{\delta \vec F}{\delta S}$$

επιφάνεια μέ κάθετο $\hat n$

$$\vec T_{-\hat n} = -\vec T_{\hat n}$$

$$\rho\,\delta S\,\cancel{\delta h}^{\,0}\,\frac{D\vec u}{Dt} = \vec T_{\hat n}\,\delta S + \vec T_{-\hat n}\,dS + \rho\,\delta S\,\cancel{\delta h}^{\,0}\,\vec g$$

$$\vec T_{\hat n}(\vec r) \doteq (T_{n1}, T_{n2}, T_{n3})$$



$\vec T_{\hat n}(\vec r)$ - γνωστό $\qquad \vec T_{\hat n'}(\vec r) = ?$

Μόνο άν γνωρίζουμε τίς δυνάμεις σέ τρία κάθετα επίπεδα πού διέρχονται από τό σημείο $\vec r$. Γιά κάθε $\vec r$.

δύναμη στή $\hat i$-επιφάνεια

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

συμμετρικός τανυστής ⇒ μηδέν ροπές

x-συνιστώσα δύναμης ανά επιφάνεια

σ_{ij}: j δείκτης κατεύθυνση δύναμης επιφάνεια; i δείκτης επιφάνειας $\hat n_i$

$$\boxed{\overline{\overline{\sigma}}(\vec r, t)}$$

$$\vec{T}_{\hat{i}}(\vec{r}) = \sigma_{11}\hat{i} + \sigma_{12}\hat{j} + \sigma_{13}\hat{k}$$

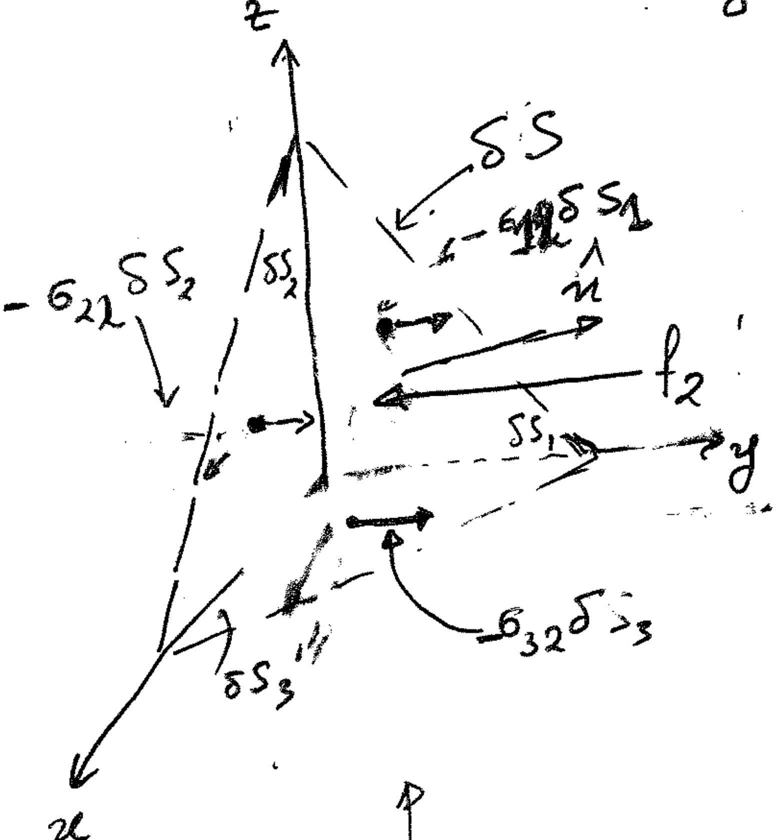
$$\hat{j} \quad \vec{T}_{\hat{j}}(\vec{r}) = \sigma_{21}\hat{i} + \sigma_{22}\hat{j} + \sigma_{23}\hat{k}$$

$$\hat{k} \quad \vec{T}_{\hat{k}}(\vec{r}) = \sigma_{31}\hat{i} + \sigma_{32}\hat{j} + \sigma_{33}\hat{k}$$

io $\vec{T}_{\hat{n}} = \sum_j T_{\hat{n}j} \cdot \hat{e}_j \quad , \quad T_{\hat{n}j} = \sum_i n_i \sigma_{ij}$

$$= n_1\hat{i} + n_2\hat{j} + n_3\hat{k}$$

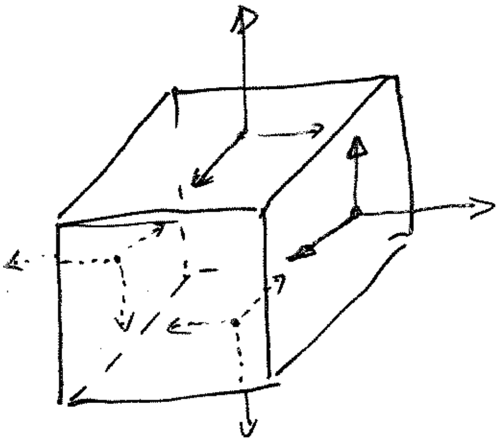
$$\delta\vec{S} = \delta S\,\hat{n} = \delta S\,(n_1\hat{i} + n_2\hat{j} + n_3\hat{k})$$
$$= \delta S_1\hat{i} + \delta S_2\hat{j} + \delta S_3\hat{k}$$

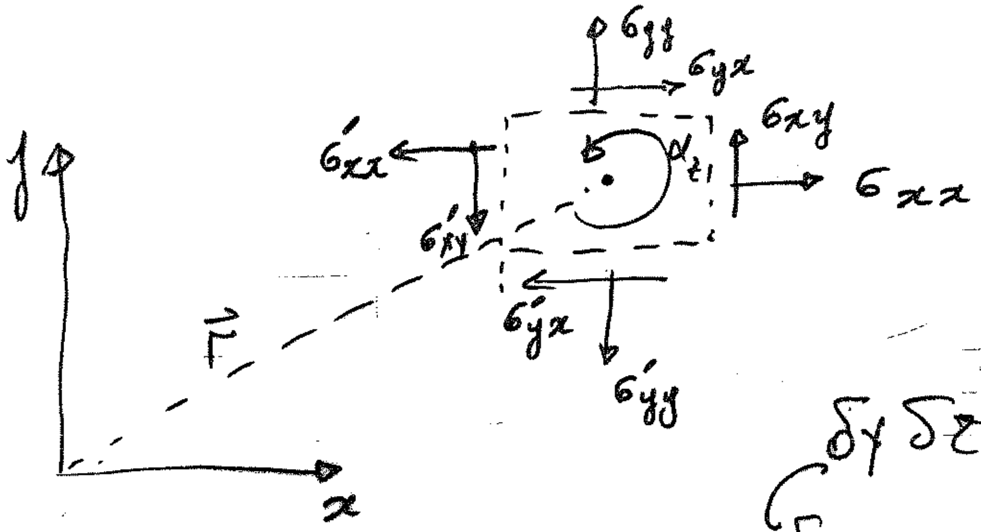


$$f_2 - \sigma_{12}\delta S_2 - \sigma_{22}\delta S_2 - \sigma_{32}\delta S_3 = 0$$

$$f_q = \sum_i \delta S_i\,\sigma_{iq}$$
$$= \delta S \sum_i n_i\,\sigma_{iq}$$

$$\boxed{\frac{f_q}{\delta S} = \sum_i n_i\,\sigma_{iq}}$$





επιφάνεια
$\delta x \times \delta y$

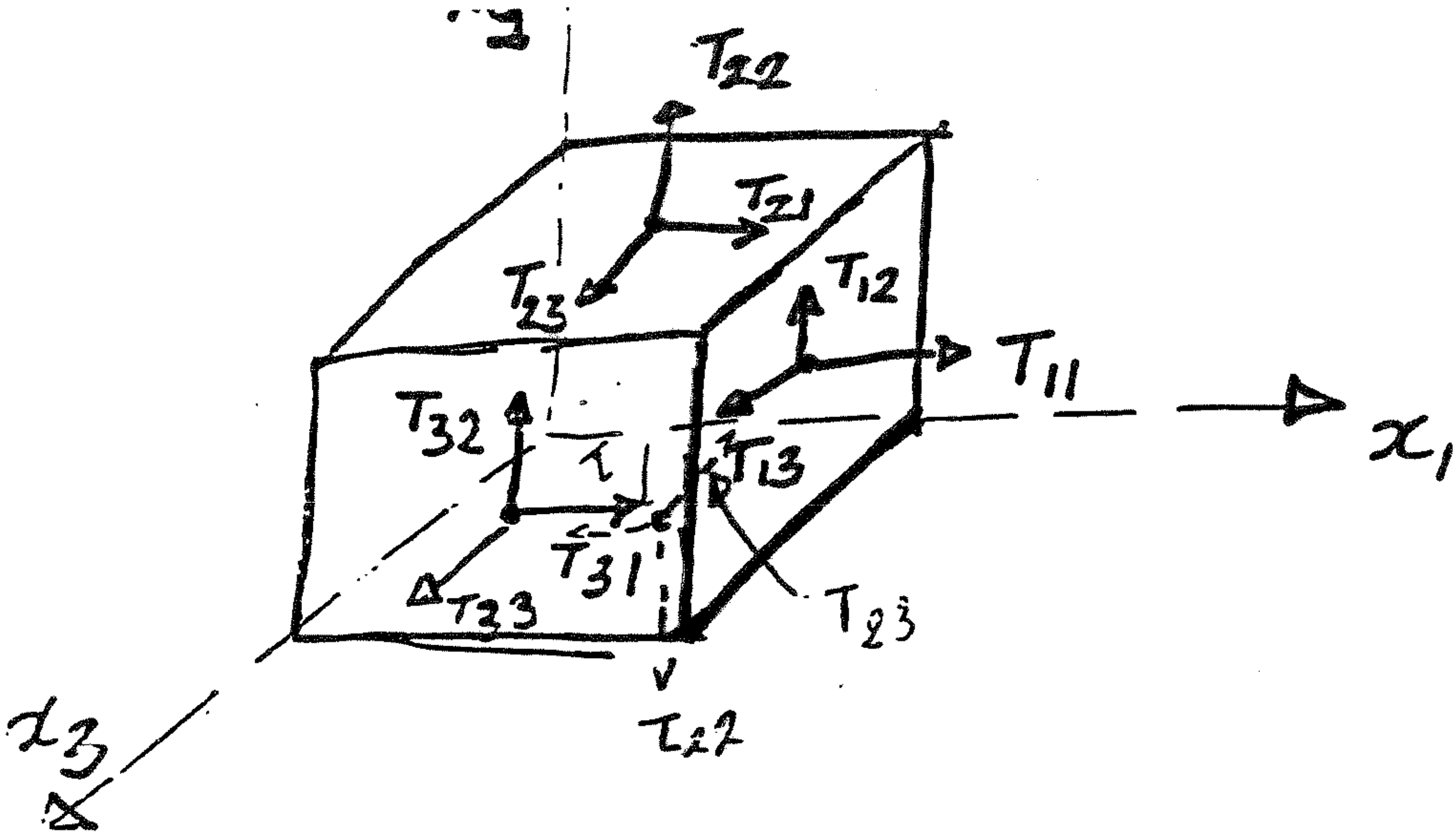
Ολική ροπή

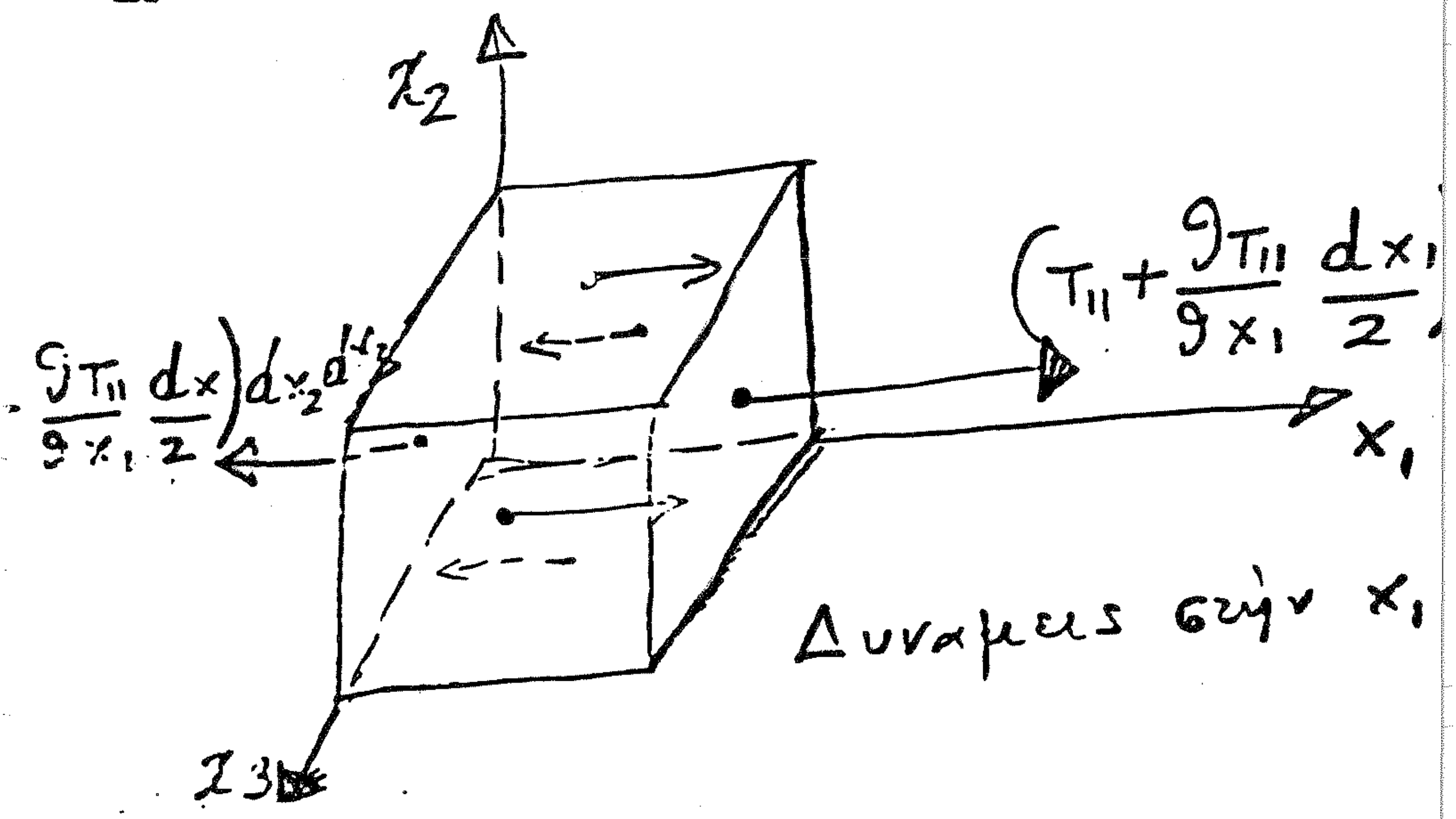
$$\frac{\tau_z}{\delta S} = \delta y\,\delta z\left[\frac{\delta x}{2}\sigma_{xy}\Big|_{x+\frac{\delta x}{2}} + \frac{\delta x}{2}\sigma'_{xy}\Big|_{x-\frac{\delta x}{2}}\right] + \delta x\,\delta z\left\{-\frac{\delta y}{2}\sigma_{yx}\Big|_{y+\frac{\delta y}{2}} - \frac{\delta y}{2}\sigma'_{yx}\Big|_{y-\frac{\delta y}{2}}\right\}$$

$$\tau_z = (\sigma_{xy} - \sigma_{yx})\,\delta x\,\delta y\,\delta z$$

$$I_z \alpha_z = T_z \qquad \tau_z \to 0 \qquad \boxed{\sigma_{xy} = \sigma_{yx}}$$

$$I_z \sim \left((\delta x)^2 + (\delta y)^2\right)\delta V \to 0$$





Ας υπολογίσουμε πρώτα την δύναμη στη x-κατεύθυνση που προέρχεται από τον τ_{11}. Η αντίστοιχη δύναμη στις δύο απέναντι επιφάνειες S_1 είναι:

$$\left(\tau_{11} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{2}\right) dx_2 dx_3 - \left(\tau_{11} - \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{2}\right) dx_2 dx_3$$

$$= \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3,$$

Ιξωδικές δυνάμεις σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$f_r = \left(\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\phi\phi}}{r} \right)$$

$$f_\phi = \left(\frac{\partial \tau_{z\phi}}{\partial z} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2\tau_{r\phi})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} \right)$$

$$f_z = \left(\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\phi z}}{\partial \phi} \right)$$

$$f_r = \mu \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right]$$

$$f_\phi = \mu \left[\frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r u_\phi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} \right]$$

$$f_z = \mu \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \phi^2} \right]$$

$$\vec{f} = \mu \nabla^2 \vec{u}$$

...ωδικές δυνάμεις σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$f_r = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\tau_{\theta r} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi r}}{\partial \phi} - \frac{(\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi})}{r} \right)$$

$$f_\theta = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\tau_{\theta\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\theta}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\tau_{\phi\phi}}{r} \cot \theta \right)$$

$$f_\phi = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \tau_{r\phi})}{\partial r} + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\theta\phi}}{r} \cos \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} \right)$$

$$f_r = \left[\nabla^2 u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\theta \cot \theta \right) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right]$$

$$f_\theta = \left[\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - + \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right]$$

$$f_\phi = \left[\nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r)}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right]$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

Σφαιρικές συντεταγμένες

$$\tau_{rr} = 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)$$

$$\tau_{r\phi} = \tau_{\phi r} = \mu \left[\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\phi}{r} \right) \right]$$

$$\tau_{\theta\theta} = \tau_{\theta\theta} = \mu \left(\frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{2u_\theta}{r} \right)$$

$$\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} = \mu \left[\frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_\phi}{\sin\theta} \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right]$$

$$\tau_{\phi\phi} = 2\mu \left[\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot\theta}{r} \right]$$

$$\tau_{rr} = 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

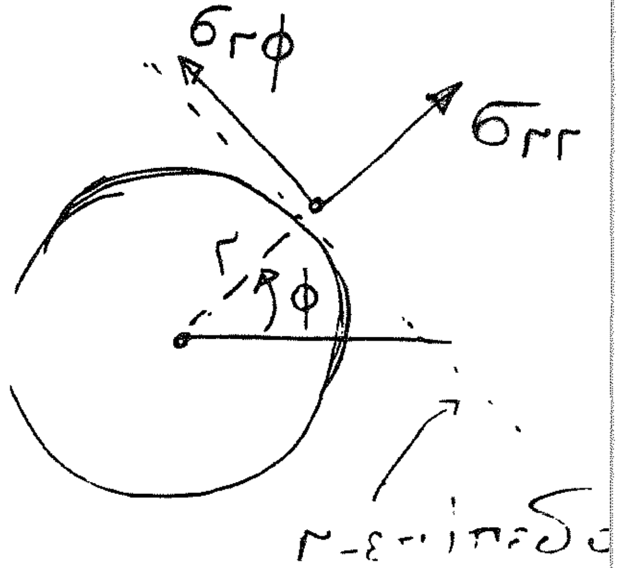
$$\tau_{r\phi} = \tau_{\phi r} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right)$$

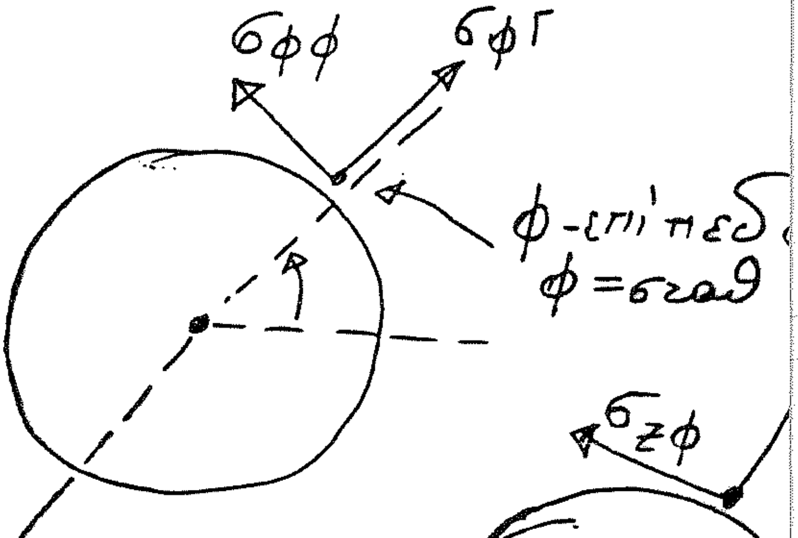
$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

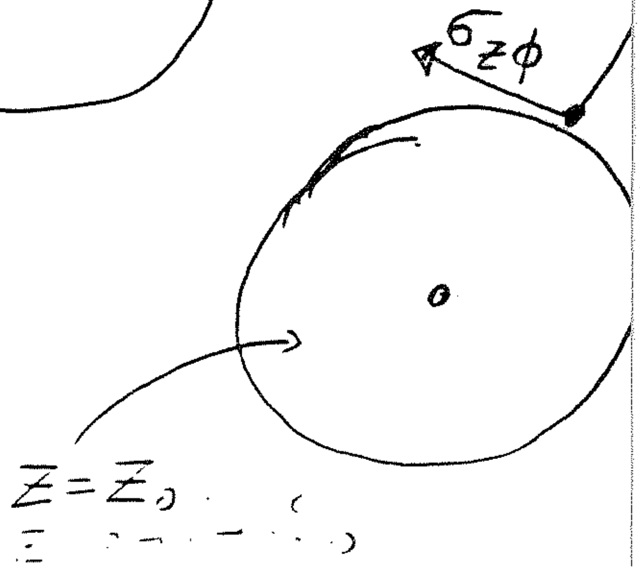
$$\tau_{\phi\phi} = 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} \right)$$

$$\tau_{\phi z} = \tau_{z\phi} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}$$







Σχέση τάσης-ρυθμού παραμόρφωσης

$$\sigma_{ij} = -\overset{\text{πίεση}}{P}\,\delta_{ij} + \overset{\text{ιξωδική τάση}}{\tau_{ij}} \Rightarrow \overline{\overline{\sigma}} = -P\,\overline{\overline{\mathbb{1}}} + \overline{\overline{\tau}}$$

επιφάνεια ← συνιστώσα

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$ - ρυθμός παραμόρφωσης

$$\underbrace{\tau_{ij} = 2\mu\,\dot{\epsilon}_{ij}}_{\text{καταστατική σχέση (Νόμος)}} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$ Νευτωνικό, ισοτροπικό ρευστό

Ισχύει για κάθε σύστημα αναφοράς.

(μονατομικό αέριο)

$$\text{Αν } \vec{\nabla}\cdot\vec{u} \neq 0 \Rightarrow \tau_{ii} \rightarrow \tau_{ii} + \cancel{\left(\lambda - \frac{2\mu}{3}\right)}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$$

↑ συντελεστής ιξώδους όγκου

$$i, j \Rightarrow \begin{cases} x, y, z \\ r, \theta, \phi \end{cases}$$

$$\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3,$$

$$F_1 = \left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3.$$

$$f_1 \equiv \frac{F_1}{dV} = \left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} \right),$$

$$f_2 = \left(\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} \right),$$

$$\vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\tau}}, \qquad f_3 = \left(\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} \right).$$

$$f_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ji}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

$$\vec{f}_m = \frac{\vec{F}}{dm} \equiv \frac{\vec{F}}{\rho dV} = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\tau}}.$$

$$\overline{\overline{\tau}} \cdot d\vec{S} = \tau_{ij} dS_i.$$

$$\vec{F} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\tau}} dV = \oint_S \overline{\overline{\tau}} \cdot d\vec{S},$$

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\tau}}\right)_i = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\tau_{ki}) = \mu \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

$$= \mu \nabla^2 u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right)$$