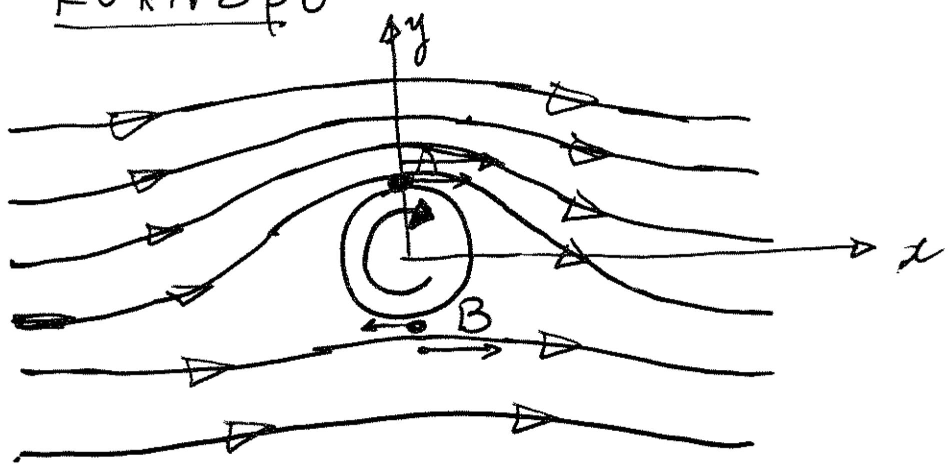
Αστρόβιλη ροή γύρω από <u>περιστρεφόμενο κύλινδρο</u>



$V_A > V_B$

$P_A < P_B$

Δύναμη ανύψωσης

Γιά σταθερό κύλινδρο (χωρίς περιστροφή)

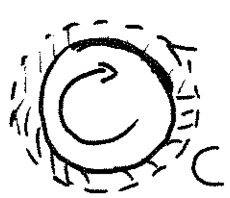
$$\Phi(R,\phi) = \underbrace{-U\cos\phi\,R}_{\text{σταθερή ροή}} \underbrace{- U\cos\phi\,\frac{a^2}{R}}_{\text{δίπολο}}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{u}(\infty) &\to U\hat{i} \\ u_R(R=a) &= 0 \end{aligned}\right\} (*)$$

$$\Phi_{στροβ} = -\frac{K_3}{2\pi}\phi \leftarrow \text{ελεύθερος στρόβιλος}$$

Δεν επηρεάζει οριακές συνθήκες (*)

Νέα οριακή συνθήκη



$$\int_C \vec{u}\cdot d\vec{l} = K_3 \qquad K_3 = -2\pi\Omega a^2$$

Ιξώδες στην επιφάνεια δημιουργεί στροβιλισμό πού παραμένει κοντά στην επιφάνεια εντός C

Λύση ισχύει εκτός C

$$\Phi = -U\cos\phi\left(R+\frac{a^2}{R}\right)-\frac{|K_3|}{2\pi}\phi$$

$$u_R = U\cos\phi\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right) \qquad = -\frac{\partial\Phi}{\partial R}$$

$$u_\phi = + U\left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)\sin\phi + \frac{|K_3|}{2\pi R} \qquad = -\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}$$

συνάρτηση ροής

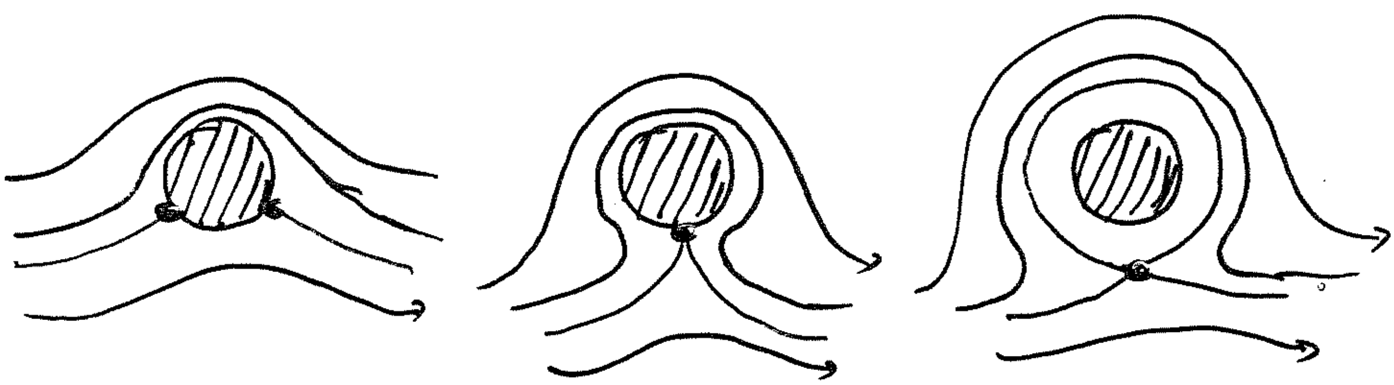
$$\psi(R,\phi) = U\sin\phi\left(R-\frac{a^2}{R}\right) + \frac{K_3}{2\pi}\ln\left(\frac{R}{a}\right)$$

Σημεία ηρεμίας $(u_R = u_\phi = 0)$

$$\begin{cases} u_R = 0 \Rightarrow R = a & \left(\phi=\frac{\pi}{2},\ \text{απορίπτεται}\right) \\ u_\phi = 0 \Rightarrow \sin\phi = \dfrac{|K_3|}{4\pi a U} < 1 \end{cases}$$

Αλλοιώς $\phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u_R = 0$

$$u_\phi = 0 \qquad R_0 = \frac{|K_3|}{4\pi U} \pm \sqrt{\left(\frac{K_3}{4\pi U}\right)^2 - a^2} \qquad |K_3| > 4\pi a U$$



$\frac{|K|}{4\pi a U} < 1$ $\qquad = 1 \qquad > 1$

Δύναμη Ανύψωσης

$$P(R,\phi) = \frac{1}{2}\rho\left(U^2 - u_R^2 - u_\phi^2\right) \qquad p - P_0$$

$$P(a,\phi) = \frac{1}{2}\rho\left(U^2 - u_\phi^2\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\rho U^2\left(1 - 4\sin^2\phi\right)}_{\text{συμμετρικό}} + \frac{\rho U K_3}{\pi a}\sin\phi - \frac{1}{2}\rho\left(\frac{K_3}{2\pi a}\right)^2$$

συμμετρικό $\qquad\qquad \phi \to -\phi$

$x \to -x \qquad\qquad$ μή συμμετρικός

$y \to -y$

$$\pm\phi,\ \pm(\pi - \phi)$$

Μόνο y-συνιστώσα δύναμης $= F_{Lift}$

$$\frac{F_{Lift}}{L} = -\int_0^{2\pi} P(R=a)\,\underbrace{a\,d\phi}_{\frac{dS}{L}}\,\sin\phi$$

$$= -\int_0^{2\pi} \frac{\rho U K_3}{\pi \cancel{a}}\cdot \cancel{a}\sin^2\phi\,d\phi = -\rho U K_3$$

> 0

$F_{Lift} \sim \rho$ - ρευστού (μικρή σε αέρα)

$\sim U$ - ταχύτητας ρευστού ή μπάλλας

$\sim$ σπίν (στροβιλισμού) $\sim \underbrace{a^2\Omega}_{\text{συνδιασμός}}$

συντελεστής ανύψωσης $C_L = \dfrac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U A}$ - κάθετη επιφάνεια

Η δύναμη ανύψωσης δεν απαιτεί περιστροφή του σώματος
Αρκεί να υπάρχει στροβιλισμός στην επιφάνειά του.

Εν γένει

$$\vec{F} = \rho\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ταχύτητα} \\ \text{ροής}}}{\vec{U}} \times \vec{\Gamma}$$

κύλινδρος οποιασδήποτε διατομής

από κυκλοφορία στην επιφάνεια

Έτσι έχουμε δύναμη ανύψωσης σε στρόβιλο ή σύνολο στροβίλων

$$\vec{F} = \rho \vec{U} \times \left(\sum_i \vec{\Gamma}_i \right)$$

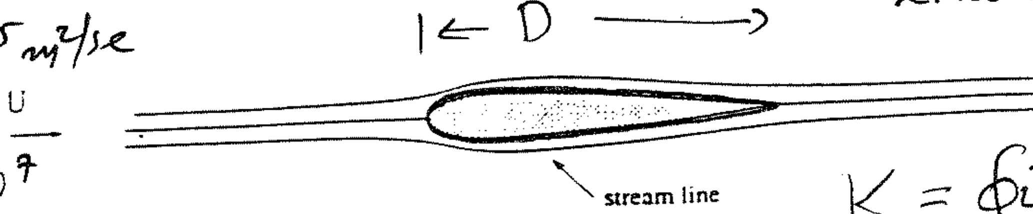
$u = 350\ km/hr$

$D = 3m$

$\nu = 1.5 \times 10^{-5}\ m^2/se$

$R_e \simeq 2 \times 10^7$

εκτός δ ⇒ εξίσωση Bernoulli → P



$K = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l} = c$

$F_{ανύψωσης} = c$

μηδέν στροβιλισμ.

Ιξώδες → οριακό στρώμα $\delta \simeq D \sqrt{\frac{2}{R_e}}$

Σχ. 5.54 Σταθερή ροή γύρω από συμμετρικό πτερύγιο ευθυγραμμισμένου με την σταθερή ροή

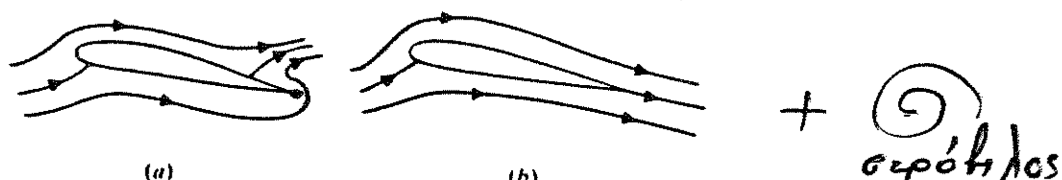
→ αλλά δημιουργεί στροβιλισμό!!!

(α) άπειρη επιτάχυνση στην άκρη (πίσω)

$K = 0$

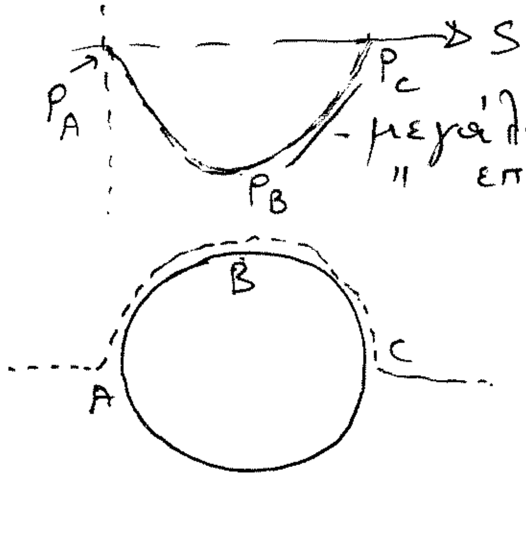
Zhukovskii

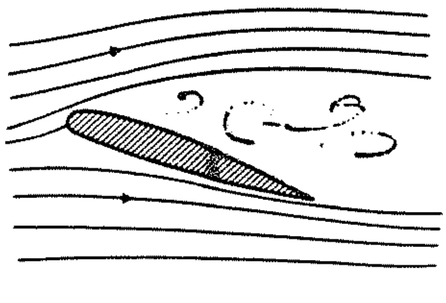
(β) $K \neq 0$ ώστε σημείο ηρεμίας στην άκρη. πεπερασμένη επιτάχυνση



Σχ. 5.55 (α) Σταθερή ροή γύρω από πτερύγιο χωρίς κυκλοφορία. (β) Πραγματική ροή με κυκλοφορία.

Αύξηση γωνίας αυξημένο στροβιλισμό αποχώρηση





Σχ. 5.57 Σταθερή ροή γύρω από κεκλιμμένο πτερύγιο.

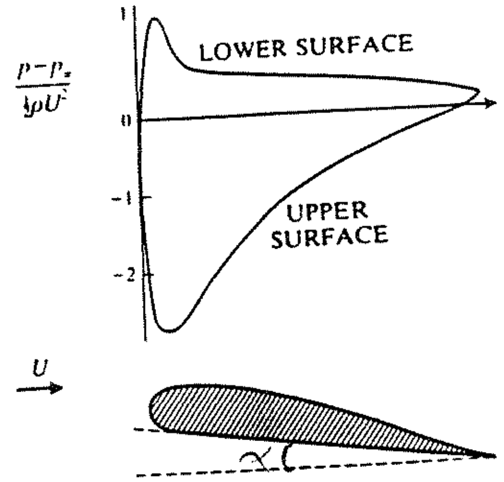
α - μικρό

$K = \pi D U \alpha$

χορδή

$F_L = \rho U K L$

μήκος

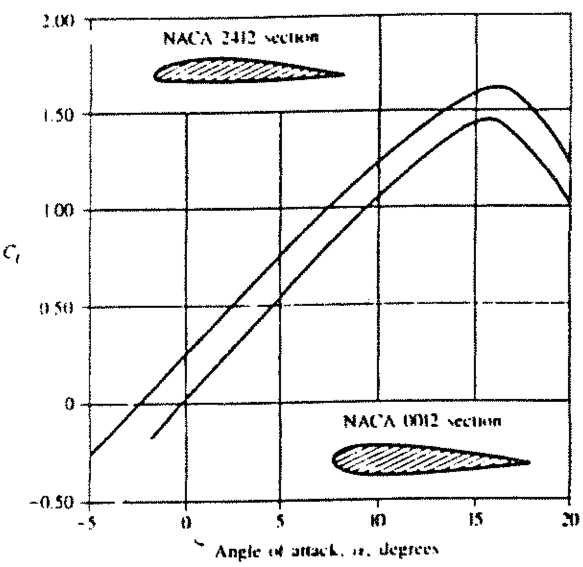


Κατάλληλες σχεδιασμένες ομαλή μεταβολή πίεσης στο πίσω αποφεύγει διαχωρισμός

Σχ. 5.58 Κατανομή της πίεσης (πάνω και κάτω) κατά μήκος του πτερυγίου για σταθερή ροή γύρω από κεκλιμμένο πτερύγιο.

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U^2 DL} - S$$

$$C_L = 2\pi\alpha$$



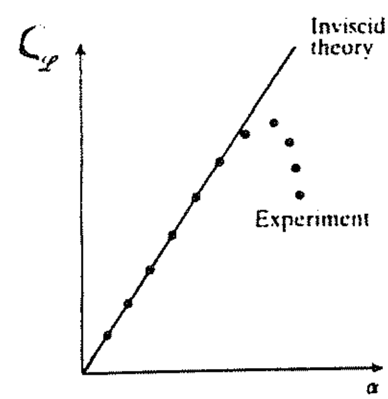


Fig. 1.11. Lift on a symmetric aerofoil.

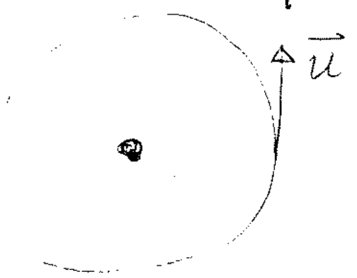
Σχ. 5.58 Συντελεστής αντίστασης για τυπικό πτερύγιο.

Αντί να αυξήσουμε χορδή ή ασυμμετρία

- πτήση
μειωμένη αντίσταση
σταθερός στροβιλισμός

απογείωση
σημαντικός στροβιλισμός
+
μεγάλη αντίσταση

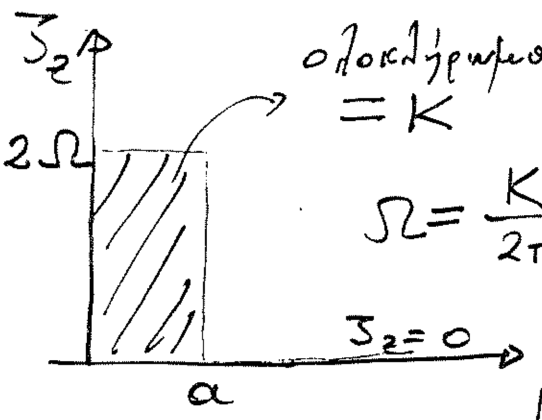
Ελεύθερος στρόβιλος



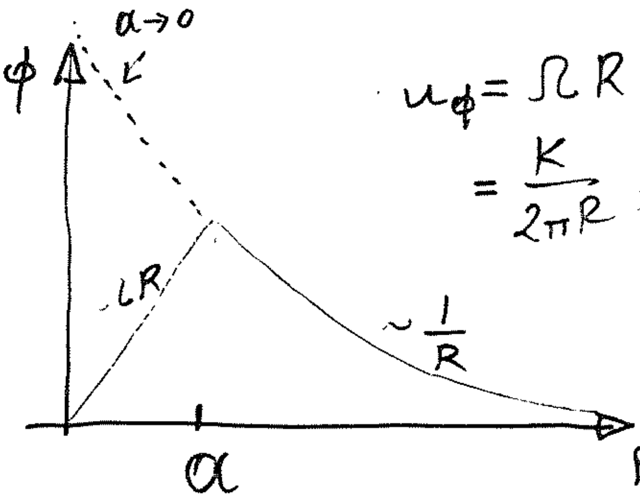
$$u_\phi = \frac{K}{2\pi R} \qquad \vec{\zeta} = K\,\delta(\vec{R})\,\hat{e}_z$$

$$P(R) = -\frac{1}{2}\rho\left(\frac{K}{2\pi R}\right)^2$$ από Bernoulli

Μοντέλλο Rankine

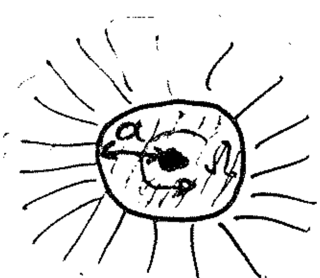


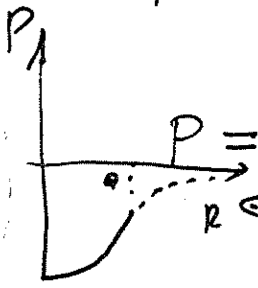
$$\Omega = \frac{K}{2\pi a^2}$$



$u_\phi = \Omega R\,, \; R<$

$\;\;\;\;= \frac{K}{2\pi R}\,, \; R>$





$$P = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{K}{2\pi a^2}\right)^2 (R^2 - 2a^2) \qquad R<a$$

από διατήρηση ορμής

Παραλείψαμε διάχυση + ιξώδες.

Γιά πεπερασμένου μήκους στρόβιλο — διατήρηση μάζας

$$\left.\begin{aligned} L &\to L + \delta L \\ a &\to a - \delta a \end{aligned}\right\} \text{ ώστε } L a^2 = \text{σταθερό} \;\Rightarrow\; \frac{\delta a}{\delta L} = + \frac{a}{2L}$$

$$a^2 \delta L - 2aL\,\delta a = 0$$

επίσης $\Omega a^2 = \text{σταθ}$ - διατήρηση ολικού στροβιλισμού

$\Rightarrow$ αύξηση Ω $\Rightarrow$ αύξηση περιστροφικής κινητικής ενέργειας

$$K.E = \frac{1}{2}\int_0^{R_m} u_\phi^2\,(2\pi R)\,dR = \frac{\rho K^2 L}{4\pi}\left[\frac{1}{4} + \ln\frac{R_m}{a}\right]$$

Μεταβολή λόγω δL καί δa

παραγώγιση ως πρός L μέ $\frac{da}{dL}=\frac{a}{2L}$

$$\Rightarrow \frac{\rho K^2}{4\pi}\left[\frac{3}{4}+\ln\frac{R_m}{a}\right]$$

Τό έργο πού απαιτείται γίνεται από τήν πίεση γιά μονάδα επιμήκυνση. Η ολική δύναμη πού ασκείται στήν επιφάνεια τού εδάφους είναι

$$\int_0^{R_m} P\,(2\pi R)\,dR = \frac{\rho K^2}{4\pi}\left\{\int_0^a\left(\frac{R^3}{a^4}-2\frac{R}{a^2}\right)dR-\int_a^{R_m}\frac{dR}{R}\right\}.$$

= μεταβολή κινητικής ενέργειας ανά μονάδα επιμήκυνσης.

Ασυνέχεια στόν στροβιλισμό

Εάν επιτρέψουμε δράση ιξώδους έχουμε διάχυση καί a αυξάνει μέ t.

Έχουμε μόνο εφαπτομενική ταχύτητα

Στόν ανεμοστρόβιλο έχουμε ροή πρός άξονα

Πηγή + ελεύθερο στρόβιλο $\Rightarrow \vec{u}=u_R\hat{e}_R+u_\phi\hat{e}_\phi$

$-Q$ $\quad K$

$$\Phi(R,\phi)=\frac{Q}{2\pi}\ln R-\frac{K}{2\pi}\phi \longleftrightarrow \Psi(R,\phi)=\frac{Q\phi}{2\pi}+\frac{K}{2\pi}\ln R$$

$$P=-\frac{\rho}{8\pi^2}\left(Q^2+K^2\right)\frac{1}{R^2}$$

ιξώδες $\rightarrow$ απεντοπισμό απόκλισης + στροβιλισμού