Εξίσωση Euler - Διατήρηση Ορμής

Ιδανικό αέριο ($\mu=0$)

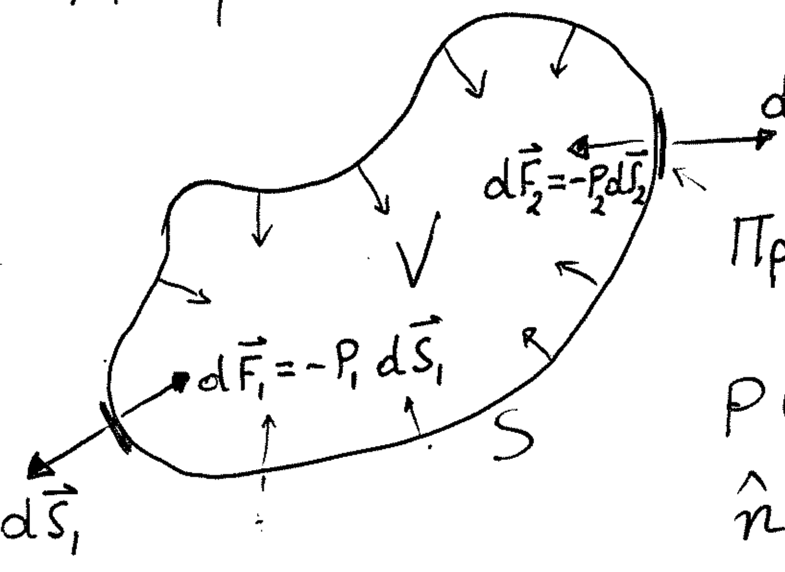
• Σωματίδιο μάζας $\delta m = \rho\,\delta V$

$$\delta m\,\vec{a} = \vec{F}_{ext} \Longrightarrow \rho\,\delta V\Big(\underbrace{\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}}_{\vec{a}}\Big) = -\underbrace{\vec{\nabla}P}_{\frac{\text{δύναμη}}{\text{όγκο}}}\,\delta V$$

$$\underbrace{\rho}_{\text{πυκνότητα}}\Big\{\overbrace{\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}}^{\text{επιτάχυνση}}\Big\} = -\vec{\nabla}P \leftarrow \frac{\text{δύναμη}}{\text{όγκο}}$$

Ισχύει για οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα.

• Μακροσκοπικό σύστημα



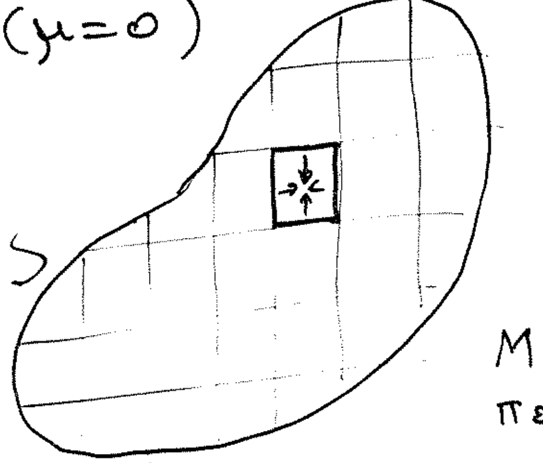
$$\vec{F}_{\varepsilon\xi} = \sum_i d\vec{F}_i \equiv -\oint_S P\,d\vec{S}$$

Προσοχή! Άθροισμα διανυσμάτων

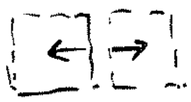
$P(\vec{r})$, $d\vec{S} = dS\,\hat{n}$

$\hat{n}(\vec{r})$ - μοναδιαίο αλλά αλλαγή κατεύθυνσης

Δύναμη πίεσης $\perp$ στην επιφάνεια προς μέσα, ($\mu=0$)

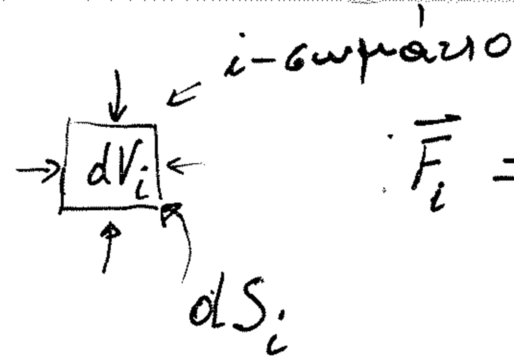


Αθροίζουμε τις δυνάμεις σε όλα τα σωματίδια



Γειτονικά σωμάτια ίσες και αντίθετες δυνάμεις αναιρούνται

Μένουν μόνο οι δυνάμεις στην περιφέρεια



$$\vec{F}_i = -\oint_{dS_i} P\, d\vec{S} = -\vec{\nabla} P(\vec{r}_i)\, dV_i$$

$$\sum_i \vec{F}_i = -\oint_S P\, d\vec{S} = -\sum_i \vec{\nabla} P(\vec{r}_i)\, dV_i$$

$$= -\int_V \vec{\nabla} P(\vec{r})\, dV$$ ολική δύναμη

Δύναμη βαρύτητας (ασκείται σε όλο τον όγκο)

σωμάτιο: $\delta m \vec{g}$ ή $\delta m \left[-\vec{\nabla} U(\vec{r})\right]$

σταθερά σε μικρές αποστάσεις

Τοπική αδράνεια, μεταφορική, Δύναμη πίεσης, βαρύτητας / ανά μάζα

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} \equiv \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} + \vec{g}$$ Εξίσωση Euler

Δεν έχουμε φορτισμένα σωμάτια (π.χ. πλάσμα)

Ισχύει και για συμπιεστή ροή

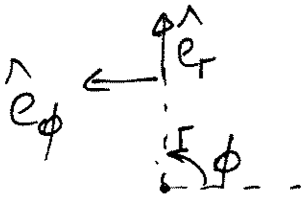
$$\vec{\nabla} = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\phi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

4.4 Εξισώσεις Euler σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Για την περίπτωση ανιξωδικής και ασυμπίεστης ροής οι εξισώσεις ορμής και συνέχειας μ δίνουν την κατανομή της ταχύτητας $\vec{u}(\vec{r},t)$ και της πίεσης $P(\vec{r},t)$ στο χώρο και τη μετ βολή τους στο χρόνο. Για προβλήματα ροής με κυλινδρική συμμετρία και συνιστώσες τ ταχύτητας $\vec{u} \equiv (u_r, u_\phi, u_z)$, οι εξισώσεις διατήρησης ορμής και συνέχειας της πυκνότητα παίρνοντας υπόψη μόνο τη βαθμίδα πίεσης, γίνονται

$\vec{u} = u_r\hat{e}_r + u_\phi\hat{e}_\phi + u_z\hat{e}_z$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})u_r - \frac{u_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}. \qquad \hat{e}_r \qquad (1$$



$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})u_\phi + \frac{u_r u_\phi}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \phi}. \qquad \hat{e}_\phi \qquad (1$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})u_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}. \qquad \hat{e}_z \qquad (1$$

και

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0 \qquad ($$

όπου σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$

$$\vec{u}\cdot\vec{\nabla} = u_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} + u_z\frac{\partial}{\partial z}. \qquad ($$

Οι όροι στο αριστερό μέρος που δεν έχουν παράγωγιση προέρχονται από την παραγώγ ως προς ϕ των μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{e}_r$ και $\hat{e}_\phi$. Έτσι π.χ.

$$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})(u_r\hat{e}_r) = \left[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})u_r\right]\hat{e}_r + \frac{u_r u_\phi}{r}\hat{e}_\phi,$$

που μας δίνει συνεισφορά και στην εφαπτομενική επιτάχυνση.

Εάν τώρα η ταχύτητα έχει την μορφή

$$\boxed{\vec{u} = u_\phi(r,t)\hat{e}_\phi,} \qquad ($$

οι γραμμές ροής είναι κυκλικές και όπως είδαμε στο Κεφ. 3, λόγω της ανεξαρτησίας u_ϕ από την γωνία ϕ, η σχέση ασυμπιεστότητας $(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})$ ικανοποιείται αυτόματα. Για περίπτωση αυτή

$$\vec{u}\cdot\vec{\nabla} = \frac{u_\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\left[u_\phi(r,t)\hat{e}_\phi\right] = \frac{u_\phi^2}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\hat{e}_\phi = -\frac{u_\phi^2}{r}\hat{e}_r. \qquad ($$

Οι εξισώσεις Euler γίνονται

$$-\frac{u_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}.$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \phi}.$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = 0.$$

Από τις εξισώσεις (25, 26) συμπεραίνουμε ότι

$$P(r,\phi,t) = g(r,t)\phi + f(r,t),$$

και επειδή η πίεση είναι μονοσήμαντη, δηλ. $P(r,\phi+2\pi) = P(r,\phi)$, έχουμε $g(r,t) =$ και επομένως η πίεση εξαρτάται μόνο από την ακτίνα r και το χρόνο t. Αυτό σημαίνει δεν έχουμε βαθμίδα πίεσης στην $\hat{e}_\phi$ (εφαπτομενική) κατεύθυνση και επομένως $\frac{\partial u_\phi}{\partial t} =$ δηλ. δεν έχουμε εφαπτομενική επιτάχυνση. Έτσι, η ταχύτητα είναι και ανεξάρτητη χρόνου[1].

Εξισώσεις Euler σε σφαιρικές συντεταγμένες

Μεταφέροντας τις συνιστώσες της επιτάχυνσης σε σφαιρικές συντεταγμένες καθώς και βαθμίδα της πίεσης εύκολα βρίσκουμε

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})u_r - \frac{u_\theta^2}{r} - \frac{u_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}.$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\phi^2 \cot\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \theta}.$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})u_\phi + \frac{u_r u_\phi}{r} + \frac{u_\theta u_\phi \cot\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial \phi}.$$

και

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi} = 0.$$

όπου σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\vec{u}\cdot\vec{\nabla} = u_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{u_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}.$$

[1]Το τελευταίο δεν ισχύει αν πάρουμε υπόψη και τις δυνάμεις τριβής λόγω του ιξώδους, όπως θα δο στο Κεφ. 6

Θεώρημα Bernoulli - Διατήρηση ενέργειας

Ασυμπίεστη ροή (ρ=σταθ)

Αστρόβιλη ροή - $\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = 0 \qquad \vec{u} = +\vec{\nabla}\Phi$

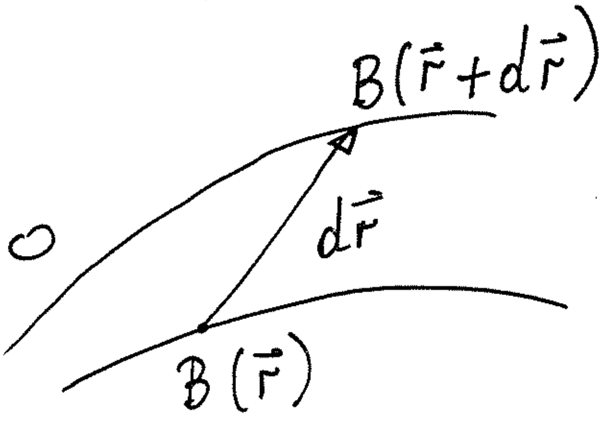
$$\vec{\alpha} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} \equiv \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}u^2\right) - \vec{u}\times\vec{\zeta}$$

Διατήρηση ορμής $\quad \vec{\alpha} = \vec{f}_{\varepsilon\xi}$

$$+\vec{\nabla}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}u^2\right) = -\vec{\nabla}U - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P \quad , \ U = gz$$

Μόνιμη ροή $\quad \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

$$\vec{\nabla}\Big[\underbrace{\frac{1}{2}u^2 + \frac{P}{\rho} + U(\vec{r})}_{B(\vec{r})}\Big] = 0$$

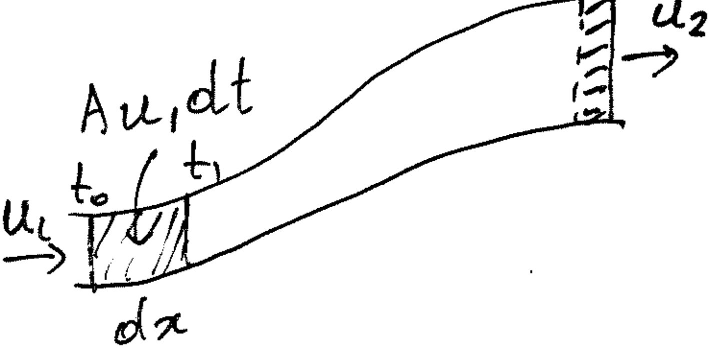


$$d\vec{r} \Rightarrow dB(\vec{r}) = (\vec{\nabla}B)\cdot d\vec{r}$$

Γιά οποιοδήποτε $d\vec{r} \Rightarrow dB = 0$

$$\Rightarrow B(\vec{r}) = \text{σταθερά} \Rightarrow \frac{1}{2}u^2 + \frac{P}{\rho} + U = \text{σταθ}$$

σταθερά ίδια σέ όλο τόν όγκο.



$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}u_2^2 + U_2\right) - \left(\frac{1}{2}u_1^2 + U_1\right)}_{\text{μεταβολή ενέργειας}} = \underbrace{\frac{P_1}{\rho} - \frac{P_2}{\rho}}_{\text{έργο στά δύο άκρα}}$$

Συμπιεστό ρευστό $\rho(P)$

$$\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P \to \vec{\nabla}\left\{\underbrace{\int^{P}\frac{1}{\rho(P')}dP'}\right\} \quad \text{αντί } \frac{P}{\rho}$$

Μή μόνιμη ροή

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = +\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi \Rightarrow \vec{\nabla}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}u^2 + U(\vec{r}) + \int^{P}\frac{dP'}{\rho(P')} = \text{σταθ}(t)$$

Μή αστρόβιλη ροή

⇒ έργο στροβιλισμού /ανά μονάδα μάζας

$$d\vec{r}\cdot(\vec{u}\times\vec{\zeta}) \Rightarrow d\left(\frac{1}{2}u^2 + U + \frac{P}{\rho}\right) \neq 0 \quad = C(\vec{r})$$

- $\vec{u}\times\vec{\zeta} = 0$ – μηδέν έργο αν $\vec{u} \parallel \vec{\zeta}$

  $C(\vec{r})$ = σταθ ανεξάρτητη τού $\vec{r}$

  Άξονας περιστροφής κατά μήκος ροής

- $d\vec{r}$, $\vec{u}, \vec{\zeta}$ – ίδιο επίπεδο

  σταθερά διαφορετική σε κάθε επίπεδο

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right] = -\vec{\nabla}P - \rho g \underbrace{\vec{\nabla}h(\vec{r})}_{-U = gh}$$

χαρακτηριστική βαθμίδα πίεσης

$$\vec{r} = L\,\vec{r}' \qquad \vec{\nabla}P = \left(\frac{\Delta P}{L}\right)\vec{\nabla}'P'$$

$$\vec{u} = u_0\,\vec{u}' \qquad \vec{\nabla} \to \frac{1}{L}\,\vec{\nabla}'$$

$$t = \frac{L}{u_0}\,t' \qquad \vec{\nabla}h \to \vec{\nabla}'h'$$

$$\left(\frac{\rho u_0^2}{L}\right)\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t'} + \left(\frac{\rho u_0^2}{L}\right)(\vec{u}'\cdot\vec{\nabla}')\vec{u}' = -\left(\frac{\Delta P}{L}\right)\vec{\nabla}'P' - \rho g\,\vec{\nabla}'h'$$

Αριθμός Froude $F_r^2 = \dfrac{\text{δύναμη αδράνειας}}{\text{βαρυτική δύναμη}}$

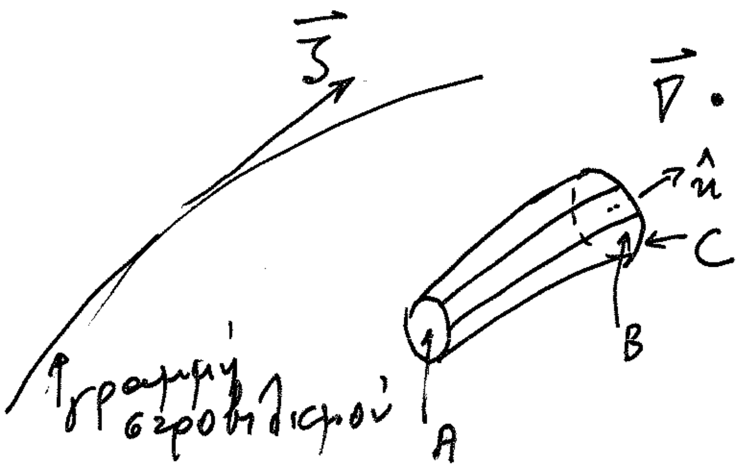
$$F_r = \sqrt{\frac{(\rho u_0^2/L)}{\rho g}} = \frac{u_0}{\sqrt{gL}} \qquad \frac{u_0^2}{L} \gg g \text{ συνήθως}$$

C_p - συντελεστής πίεσης $\quad C_p = \dfrac{(\Delta P/L)}{(\frac{1}{2}\rho u_0^2)/L}$

Euler $E = \dfrac{2}{C_p} = \dfrac{\rho u_0^2}{\Delta P}$

$$\frac{E}{F_r^2} \sim \frac{\text{βαρύτητα}}{\text{πίεση}} - \frac{\rho g L}{\Delta P}$$

Θεώρημα Κυκλοφορίας Kelvin

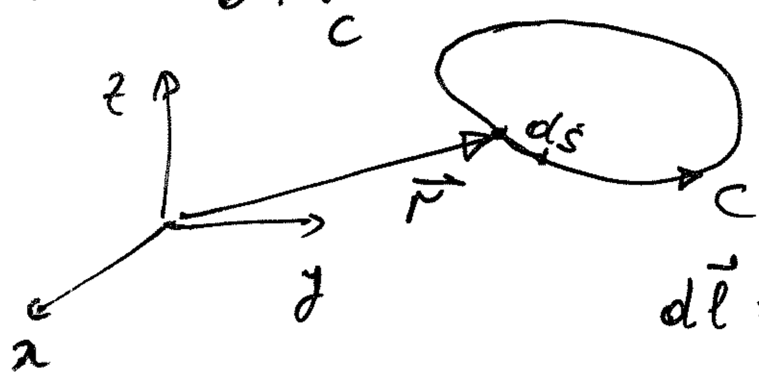


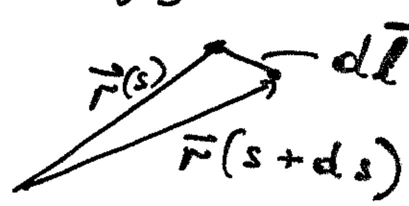
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\zeta}=0 \Leftarrow \vec{\zeta}=\vec{\nabla}\times\vec{u}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_A \vec{\zeta}\cdot d\vec{S} = \int_B \vec{\zeta}\cdot dS = \underbrace{\oint_C \vec{u}\cdot d\vec{l}}_{\text{κυκλοφορία}}$$

$$\frac{DK}{Dt} = \frac{D}{Dt}\oint_C \vec{u}\cdot d\vec{l} = \frac{D}{Dt}\oint \vec{u}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial s}\,ds$$





$$d\vec{l} = \vec{r}(s+ds)-\vec{r}(s) = \frac{\partial\vec{r}}{\partial s}\,ds$$

$\vec{r} \to \vec{q}(t)$ - θέση αντίστοιχου σωματιδίου

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\to\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}\to\vec{u} \Rightarrow \vec{u}\cdot\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial s\,\partial t}\to\vec{u}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial s}=\frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial s}$$

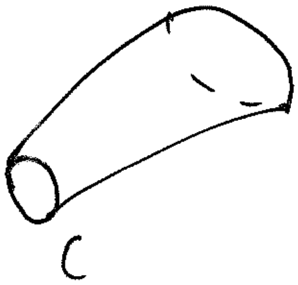
$$\frac{DK}{Dt}=\oint_C\frac{D\vec{u}}{Dt}\cdot d\vec{l}+\oint_C\vec{u}\cdot\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial t\,\partial s}\,ds = 0$$

Αν α) ανιξωδικό ρευστό $\nu=0$

β) διατηρητικές δυνάμεις όγκου $\vec{f}=-\vec{\nabla}U$

γ) ομογενής πυκνότητα

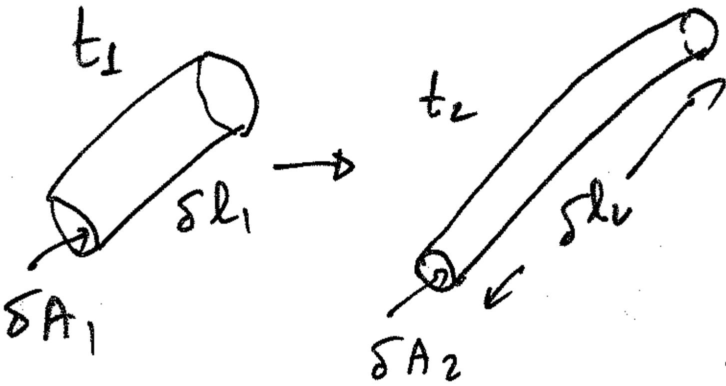
Διατήρηση κυκλοφορίας



α) κυκλοφορία είναι υλική ποσότητα

β) σωλήνες στροβιλισμού κινούνται με την ροή.

γ) ένταση στροβίλων διατηρείται



Kelvin $\Rightarrow \zeta_1 \delta A_1 = \zeta_2 \delta A_2$

συνέχεια $\delta l_1 \delta A_1 = \delta l_2 \delta A_2$

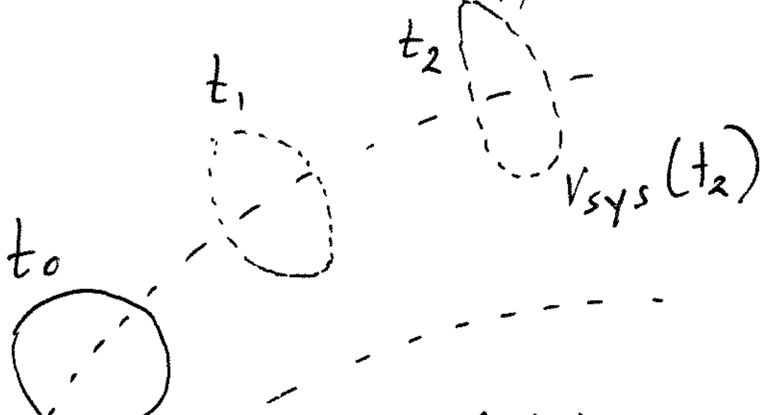
$\rho =$ σταθ

$$\Rightarrow \frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \frac{\delta l_1}{\delta l_2}$$

τέντωμα γραμμής στροβιλισμού

Μακροσκοπικοί νόμοι διατήρησης

Για όγκο συστήματος (υλικό όγκο) $V_{sys}(t)$



$$M(t)=\int_{V_{sys}(t)}\rho\, dV$$

μεταβολή μάζας συστήματος καθώς κινείται $\frac{DM}{Dt}=\frac{D}{Dt}\int_{V_m(t)}\rho\, dV=0$

$$\frac{D}{Dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}) \qquad dB=\overbrace{\rho\, dV}^{\delta m}\, b$$

Γενίκευση για $b(\vec{r},t)$ - εντατική (πυκνότητα)

$B(t)$ - εκτατική ποσότητα

$B(t) \to M$

$$B(t)=\int_{V_{sy}(t)}\rho\, b(\vec{r},t)\, dV \qquad \overbrace{\frac{DB}{Dt}=\frac{D}{Dt}\int_{V_{sy}(t)}\rho\, b(\vec{r},t)\, dV}^{\text{δύσκολο}}$$

$b=1 \quad B(t)\to M(t)$

$b \Rightarrow \vec{b}(\vec{r},t)=\vec{u}(\vec{r},t) \qquad \vec{b}=b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k}$

$\vec{B}(t)=\vec{P}(t)$ - ορμή $=\int_{V_{sys}(t)}\rho\,\vec{u}(\vec{r},t)\, dV$

$\vec{u}$ - ορμή/μονάδα μάζας

$$\frac{D\vec{P}(t)}{Dt}=\frac{D}{Dt}\int\rho\,\vec{u}(\vec{r},t)\, dV=\vec{F}_{\varepsilon\xi}(t)$$

Διατήρηση στροφορμής

$$\vec{b} = \vec{r} \times \vec{u}(\vec{r},t) \qquad \vec{L}(t) = \int_{V_{sy}(t)} \rho\, \vec{r} \times \vec{u}(\vec{r},t)\, dV$$

$$\frac{D\vec{L}}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{V_{sys}(t)} \rho\, \vec{r} \times \vec{u}(\vec{r},t)\, dV = \vec{T}_{ex}(t) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Διατήρηση ενέργειας

$b = \varepsilon(\vec{r},t)$ - ενέργεια / μονάδα μάζας

$$B(t) = E(t) = \int_{V_{sys}(t)} \rho(\vec{r},t)\, \varepsilon(\vec{r},t)\, dV$$

$$\frac{DE(t)}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{V_{sys}(t)} \rho(\vec{r},t)\, \varepsilon(\vec{r},t)\, dV = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt}$$

Q - θερμότητας (είσοδος) μέσω $S_{sy}(t)$ (υλικής επιφάνεια

W - έργο (από σύστημα) " "

$\frac{D}{Dt}\int_{V_{sys}(t)} \ldots dV$ - πολύ δύσκολο
προϋποθέτει γνώση τού $V_{sys}(t)$ δηλ. της κίνησης τού ρευστού.
Αυτό όμως είναι τό ζητούμενο.

Ευτυχώς υπάρχει

λύση $\Rightarrow$ Θεώρημα Reynolds.

Θεώρημα Reynolds

Μεταστροφή ολοκλήρωσης από $V_{sys}(t) \rightarrow V_{cv}(t)$

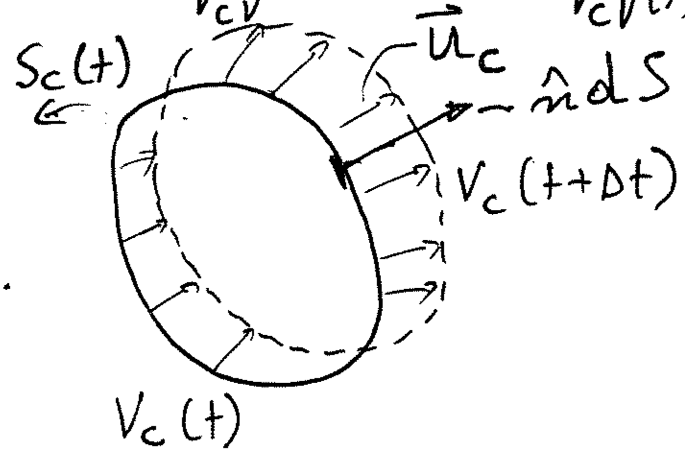
όγκος συστήματος $\rightarrow$ όγκο ελέγχου

Έστω $\phi(\vec{r},t) \equiv \rho(\vec{r},t)\, b(\vec{r},t)$

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_{cv}(t)} \phi(\vec{r},t)\,dV \qquad \frac{DG}{Dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{G(t+\delta t) - G(t)}{\delta t}$$

$$V_{cv}(t)\,,\quad \phi(t)$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_{cv}(t)} \phi(\vec{r},t)\,dV = \int_{V_{cv}(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t}\,dV + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overbrace{\int_{V(t+\Delta t)} \phi(\vec{r},t)\,dV - \int_{V(t)} \phi(\vec{r},t)\,dV}^{\Delta G}}{\Delta t}$$



$\Delta G =$ ροή ϕ μέσω επιφάνειας $S_c(t)$

Όγκος ρευστού μέσω $S_c(t)$

$$\Delta t\, \vec{u}_c \cdot (\hat{n}\, dS)$$

$\vec{u}_c$ - ταχύτητα σημείων στην $S_c(t)$

Μόνο κάθετη συνιστώσα συνεισφέρει $+$ $(-)$ αν $\vec{u}_c \cdot \hat{n} > 0$ ή (<0)

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{S_c(t)} \phi(\vec{r},t)\, \Delta t\, \vec{u}_c \cdot \hat{n}\, dS$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_c(t)} \phi(\vec{r},t)\,dV = \int_{V_c(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t}\, dV + \int_{S_c(t)} \phi(\vec{r},t)\,\vec{u}_c\cdot\hat{n}\, dS$$

Επιλέγουμε σέ χρόνο t $\quad V_c(t) = V_{sys}(t)$

Ρυθμός μεταβολής κατά την ροή = Τοπικός ρυθμός μεταβολής + Καθαρή ροή μέσω επιφάνειας.

Αλλά σέ χρόνο t $\quad \left. \begin{array}{l} V_{sys}(t) = V_c(t) \\ S_{syst}(t) = S_c(t) \end{array} \right| u_c = u$

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_{sys}(t)} \phi(\vec{r},t)\,dV = \boxed{\int_{V_c} \frac{\partial \phi}{\partial t}\, dV + \int_{S_c} \phi\, \vec{u}\cdot\hat{n}\, dS}$$

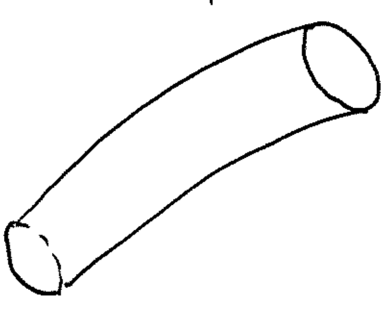
εδώ παραμένει Vsyst.

α) υπολογισμός ολοκληρώματος

β) παραγώγιση ως πρός χρόνο.

Αντί αυτό υπολογίζουμε από τό δεξιό μέρος

Γιά μόνιμη ροή $\frac{\partial}{\partial t} = 0$



Γιά σωλήνα μόνο μέσω άκρων ροή

$$\int_{S_c} \phi\vec{u}\cdot\hat{n}\, dS = \sum_{εξόδους} (\phi u_n A)_i - \sum_{εξόδους} (\phi u_n A)$$