Επιτάχυνση σωματιδίου

$\vec{r}+\delta\vec{r}$, $t+\delta t$

$\vec{r}, t$

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f} \qquad \vec{u}(\vec{r},t)$$

$$\text{επιτάχυνση} = \frac{\vec{u}(\vec{r}+d\vec{r}, t+dt) - \vec{u}(\vec{r},t)}{\delta t}$$

$$\delta\vec{r} = \vec{u}\,\delta t \qquad (\delta t \to 0)$$

Ομοίως για $a_x = \frac{\delta u_x(\vec{r},t)}{\delta t}$ x-συνιστώσα

$$\delta u_x = u_x(\vec{r}+d\vec{r}, t+dt) - u_x(\vec{r},t)$$

$$= \frac{\partial u_x}{\partial t}\delta t + \frac{\partial u_x}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u_x}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u_x}{\partial z}\delta z.$$

$$= \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial u_x}{\partial x}u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y}u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z}u_z}_{(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})u_x} \right\}\delta t$$

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})u_x$$

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}}_{\text{τοπική μεταβολή}} + \underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}}_{\text{μεταβολή λόγω μεταφοράς}} \Rightarrow \vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt}$$

$\frac{D\vec{u}}{Dt}$: μεταβολή ταχύτητας "σωματιδίου" $\Downarrow$ ακολουθούμε την κίνηση

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}$$ - υλική παράγωγος

Πεδίο ταχύτητας

$$\vec{u}(\vec{r},t) = \{\underbrace{u(\vec{r},t)}_{u_x},\ \underbrace{v(\vec{r},t)}_{u_y},\ \underbrace{w(\vec{r},t)}_{u_z}\}$$

$$\vec{r} = (x,y,z)$$

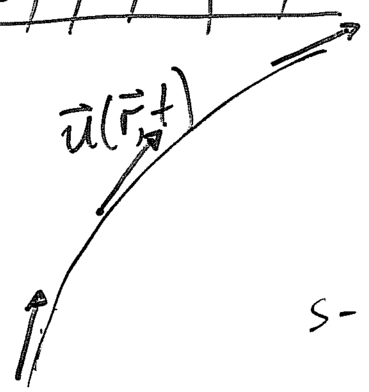
Καρτεσιανές

Μόνιμη ροή $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{u}(\vec{r})$

Μονοδιάστατη ροή $\Rightarrow u(x,t)$

Διδιάστατη ροή $\vec{u} = [u(x,y,t), v(x,y,t)]$

<u>Γραμμή ροής</u>

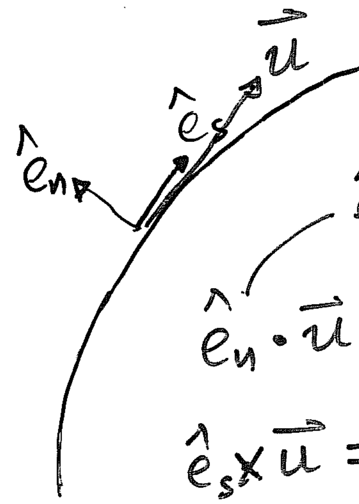


$x = x(s)$

$y = y(s)$

$z = z(s)$

s-παράμετρος



$\hat{e}_n(\vec{r},t)$

$\hat{e}_n \cdot \vec{u} = 0$

$\hat{e}_s \times \vec{u} = 0$

ή $d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + d$

$d\vec{r} \times \vec{u} = 0$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

$dy\,u - dx\,v = 0$

x-συνιστώσα

ή $dx = u\,dt,\ dy = v\,dt,\ dz = w\,dt$

Κυλινδρικές $(R,\phi,z) \Rightarrow \hat{e}_R, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z$

$\vec{r} = R\hat{e}_R + z\hat{e}_z$ $\quad d\vec{r} = (dR, R\,d\phi, dz)$

$\vec{u} = (u_R, u_\phi, u_z)$

$$\frac{dR}{u_R(R,\phi,z)} = \frac{R\,d\phi}{u_\phi(R,\phi,z)} = \frac{dz}{u_z(R,\phi,z)}$$

Μόνιμη ροή

γραμμές ροής || τροχιές σωματιδίων

Μή μόνιμη ροή

πολύ διαφορετικές

Π.χ. $u(\vec{r},t)=u_0$

$v(\vec{r},t)=\alpha t$

$w(\vec{r},t)=0$

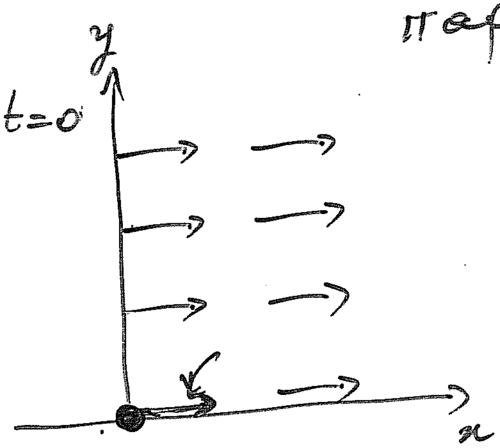
$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{v}{u}=\frac{\alpha}{u_0}t$$

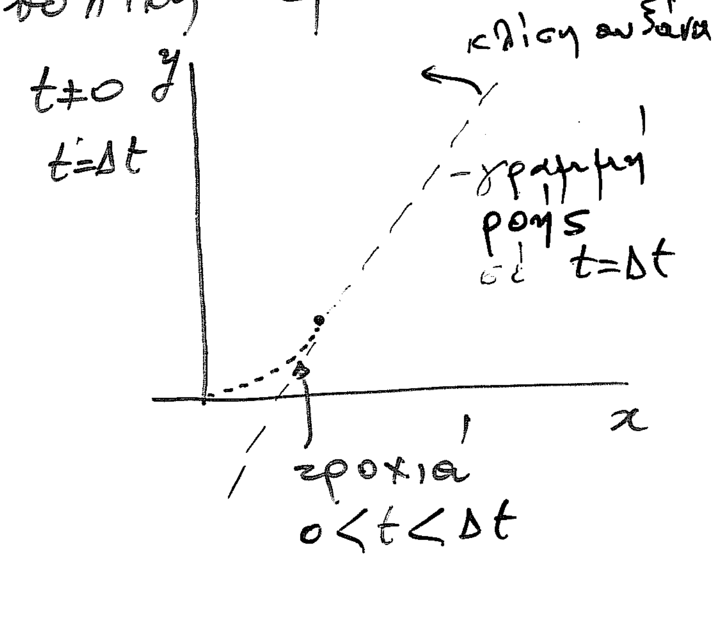
γραμμές ροής ευθείες μέ ~~κλίση~~ $\sim t$

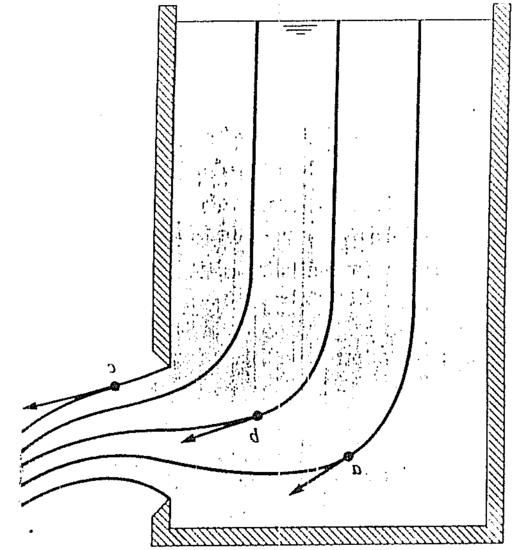
Τροχιές $x(t)=u_0 t$ μέ $x(0)=0$

$y(t)=\frac{1}{2}\alpha t^2$ $y(0)=0$

παραβολική τροχιά







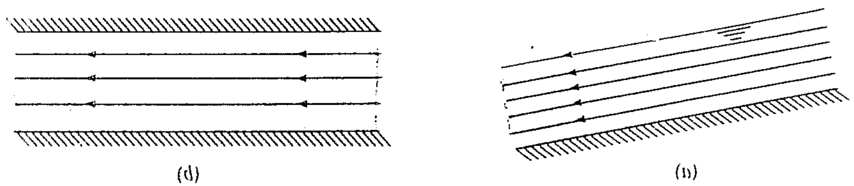


FIGURE 4.2
Uniform flow patterns.
(a) Open-channel flow
(b) Flow between parallel
plates.

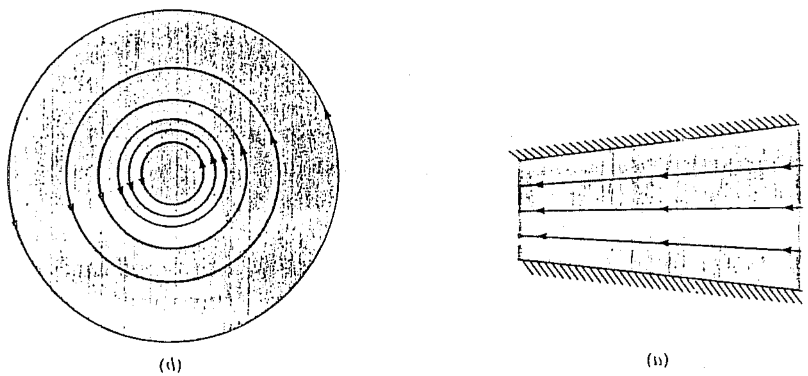
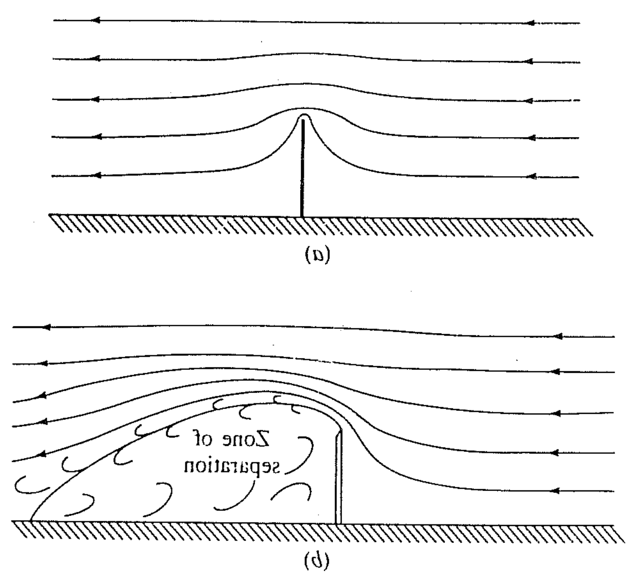


FIGURE 4.3
Flow patterns for
nonuniform flow
(a) Converging flow
(b) Vortex flow



IGURE 4.21
low past a plate. (a) Ideal
low past a plate. (b) Real
low past a plate.

Euler $\longrightarrow$ Lagrange

Μονοδιάστατη ροή $(u, v=0, w=0)$

$$u(x,t) = -\alpha x + \beta t \qquad q(x_0, t=0) = x_0$$

μή μόνιμη $\left(\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0\right)$ δείκτης σωματιδίου

$q(x_0, t) = ?$

γιά κάθε σωματίδιο

Γιά κάθε χρονική στιγμή τό σωματίδιο x_0 έχει ταχύτητα

$$u_{x_0} \equiv u(q,t) = -\alpha q + \beta t$$

$$\frac{dq}{dt} = -\alpha q + \beta t \Rightarrow \boxed{q = e^{-\alpha t}\psi}$$

$$\frac{d\psi}{dt} e^{-\alpha t} - \alpha \cancel{e^{-\alpha t}} \psi = -\alpha \cancel{e^{-\alpha t}} \psi + \beta t$$

ολοκλήρωση κατά μέρη

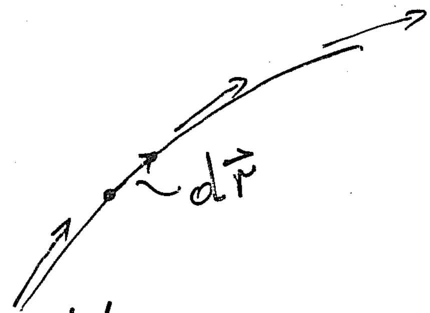
$$\psi = \psi_0 + \beta \int^t dt' \, t' e^{\alpha t'} = \psi_0 + \left(\frac{\beta}{\alpha} t - \frac{\beta}{\alpha^2}\right) e^{\alpha t}$$

$$q(t=0) = x_0 \Rightarrow \psi_0 - \frac{\beta}{\alpha^2} = x_0 \Rightarrow \psi_0 = x_0 + \frac{\beta}{\alpha^2}$$

$$\boxed{q_{x_0} = \psi_0 e^{-\alpha t} + \left(\frac{\beta}{\alpha} t - \frac{\beta}{\alpha^2}\right)} \equiv q(x_0; t)$$

$$u_{x_0}(t) = \frac{dq_{x_0}}{dt} = -\alpha \psi_0 e^{-\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha} \equiv -\alpha q + \beta t$$

Σε 3-Δ



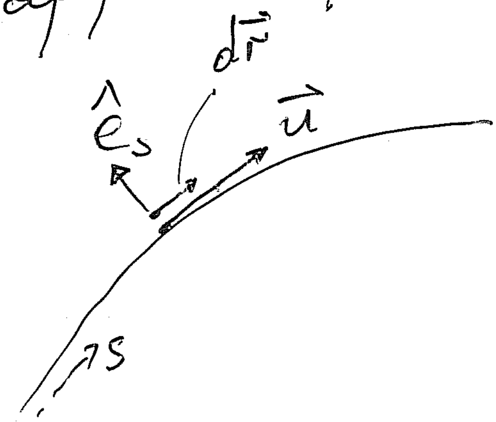
$$\frac{d\vec q}{dt} = \vec u(q,t)$$

$$\frac{dx}{u(\vec r,t)} = \frac{dy}{v(\vec r,t)} = \frac{dz}{w(\vec r,t)} = dt$$

Για $\vec q(t=0) = q_0 \Longrightarrow$ βρίσκουμε τροχιές

Εν. γένει πολύπλοκο

Γραμμές ροής



$$\hat e_s \cdot \vec u(s,t) = 0$$

s - κατά μήκος ροικής γραμμής

$$d\vec r \times \vec u(s,t) = 0$$

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)}$$ καρτεσιανές $\vec u = (u,v,w)$

$$\left.\frac{dr}{u(r,\theta,z)} = \frac{r\,d\theta}{u_\theta(r,\theta,z)} = \frac{dz}{u_z(r,\theta,z)}\right\}$$ κυλινδρικές

$$\vec u = u_r \hat e_r + u_\theta \hat e_\phi + u_z \hat z$$

Επανάληψη

$\vec{u}(\vec{r},t)$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0$ ασυμπίεστο ρευστό $\Rightarrow \psi(\vec{r},t)$

$\vec{\zeta}=\vec{\nabla}\times\vec{u}=0$ αστρόβιλη ροή $\Rightarrow \Phi(\vec{r},t)$

$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ ρυθμός μεταβολής συστήμα[τος] καθώς κινείται

$\frac{D\vec{u}}{Dt}$ επιτάχυνση σωματιδίου (Lagrange) μέ περιγραφή Euler ($\vec{u}(\vec{r},t)$)

$\frac{D\rho}{Dt}=-\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$ εξίσωση συνέχειας

$\vec{u}\cdot d\vec{S}$ – ροή όγκου – $\frac{\text{όγκος}}{\text{χρόνο}}$ μέσω dS

$\rho\vec{u}\cdot d\vec{S}$ – ροή μάζας

$\rho\vec{u}$ – ορμή/όγκο

$(\rho\vec{u})\,\vec{u}\cdot d\vec{S}$ – ροή ορμής

$\left(\frac{1}{2}\rho u^2\right)\vec{u}\cdot d\vec{S}$ " ενέργειας

$\Gamma_C=\oint_C \vec{u}\cdot d\vec{l}$ – Κυκλοφορία $=\int_S \vec{\zeta}\cdot d\vec{S}$

Δυναμικό ταχύτητας $\Phi(\vec{r},t)$

Αν $\vec{\zeta}=\vec{\nabla}\times\vec{u}=0$ $\quad \vec{u}\overset{?}{=}\vec{\nabla}\phi \quad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi)=0$

$\phi(\vec{r},t)$ ορίζεται για αστρόβιλη ροή σε 1, 2 ή 3 διαστάσεις

Αν επίσης $\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0$ ασυμπίεστη ροή

$\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi)=\nabla^2\Phi=0$ εξίσωση Laplace

Γραμμική ως προς Φ

$$\nabla^2\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0$$

ανιξώδης $\mu=0$
αστρόβιλη $\vec{\nabla}\times\vec{u}=0$
ασυμπίεστη $\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0$
+ οριακές συνθήκες

Ροή δυναμικού

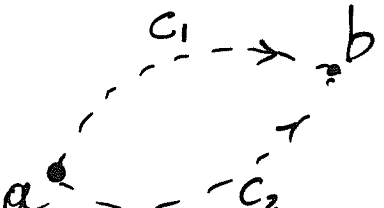
Καρτεσιανές

$$u_x=\frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad u_y=\frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad u_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

Κυλινδρικές (R,ϕ,z) $\quad \hat{e}_R,\hat{e}_\phi,\hat{e}_z,\Phi(R,\phi,z)$

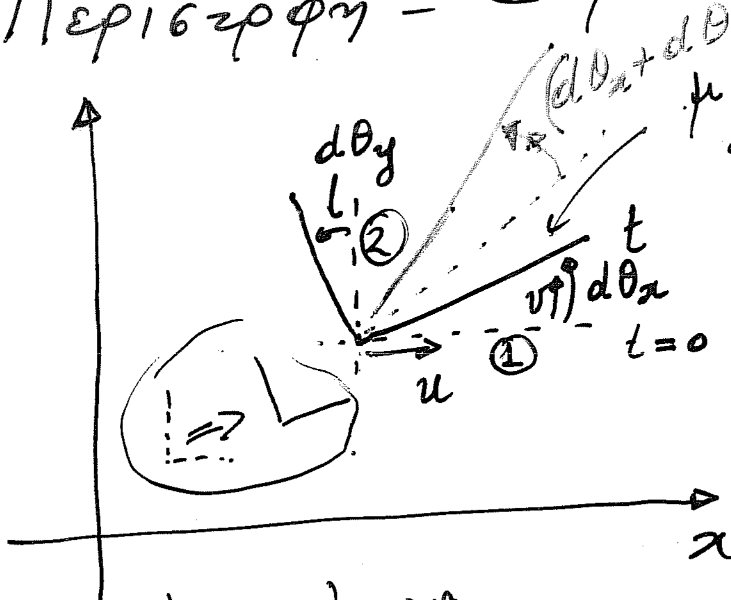
$$u_R=\frac{\partial\Phi}{\partial R} \quad u_\phi=\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \quad u_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$\Gamma_c=\oint_c\vec{u}\cdot d\vec{r}=\iint(\vec{\nabla}\times\vec{u})\cdot d\vec{S}=0 \quad \text{αν } \vec{\zeta}=0 \text{ εντός } C$$



$\Gamma_{c_1}=\Gamma_{c_2}$ αν $\vec{\zeta}=0$ εντός.

Περιστροφή - Στροβιλισμός



Μέση περιστροφή

Μέση γωνιακή ταχύτητα

γωνιακή ταχύτητα

$$\Omega_1 = \frac{d\theta_x}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Omega_2 = \frac{d\theta_y}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Omega_z = \frac{1}{2}(\Omega_1 + \Omega_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\zeta_z}{2}$$

$$\boxed{\zeta_z = 2\Omega_z}$$

στροβιλισμός = 2· μέση γωνιακή ταχύτητα

Αν $d\theta_x = d\theta_y \Rightarrow$ απλή περιστροφή

Αν $d\theta_x \neq d\theta_y \Rightarrow$ καί παραμόρφωση

Αν $d\theta_x = -d\theta_y \Rightarrow$ μόνο παραμόρφωση $(\vec{\zeta} = 0)$

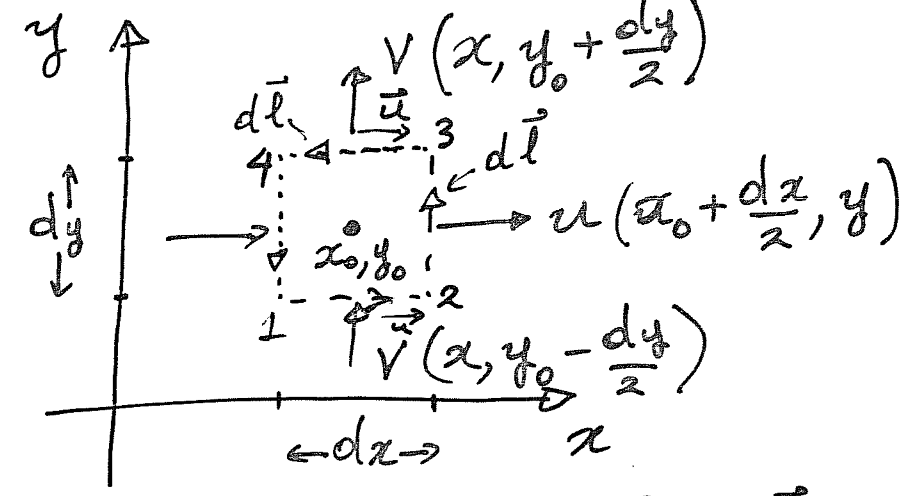
Μετρο παραμόρφωση (ρυθμός)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \theta_x}{dt} - \frac{d\theta_y}{dt}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \Rightarrow \dot{\epsilon}_{xy}$$

τανυστής

Στροβιλισμός $\vec{\nabla}\times\vec{u} = \vec{\zeta}(\vec{r},t)$

$$\vec{u} = (u, v, w)$$



κυκλοφορία

$$\int_{S\to 0}(\vec{\nabla}\times\vec{u})\cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{u}\cdot d\vec{l}$$

$$\Downarrow$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{u})_z\, dx\, dy$$

υπολογισμός $d\Gamma = \oint_C \vec{u}\cdot d\vec{l}$

$$d\Gamma_{12} = u\left(y_0-\frac{dy}{2}\right)\cdot \underbrace{1}_{\hat{i}\cdot d\vec{l}}\cdot dx \qquad \left[\cancel{u_0} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{2}\right]dx$$

$$d\Gamma_{23} = v\left(x_0+\frac{dx}{2}\right)\cdot 1\cdot dy \;\Rightarrow\; \left[\cancel{v_0} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{2}\right]dy$$

$$d\Gamma_{34} = u\left(y_0+\frac{dy}{2}\right)(-1)\,dx \qquad -\left[\cancel{u_0} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{2}\right]dx$$

$$d\Gamma_{41} = v\left(x_0-\frac{dx}{2}\right)(-1)\,dy \qquad -\left[\cancel{v_0} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{2}\right]dy$$

$$d\Gamma = \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{\zeta_z} dx\,dy \qquad \frac{d\Gamma}{dx\,dy} = \zeta_z$$

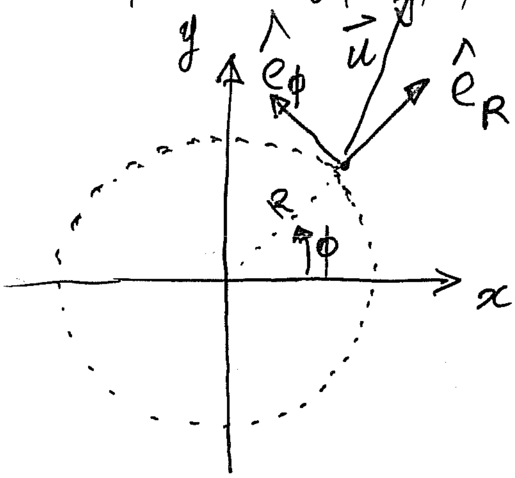
$d\Gamma \rightarrow$ μέση τιμή στροβιλισμού

Αν $\oint_C \vec{u}\cdot d\vec{l} = 0$ $\quad \left.\vec{\nabla}\times\vec{u}\right|_{S_c} = 0$ όχι παντού

Εν γένει $\zeta_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}u_k$, $\quad \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & i,j,k \text{ άρτια} \\ -1 & \text{περιττή} \\ 0 & \text{- δύο ίδιοι} \end{cases}$

$i, j, k = 1, 2, 3$

Καμπυλόγραμμες συντεταγμένες



$$\vec{u} = u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{z}$$

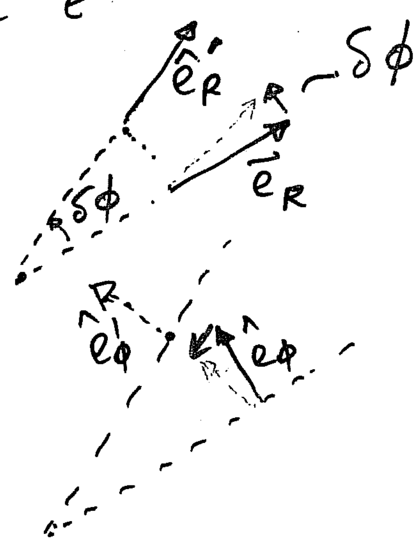
$$\vec{u} = u_R \hat{e}_R + u_\phi \hat{e}_\phi + u_z \hat{z}$$

$$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = \left\{ u_R \frac{\partial}{\partial R} + u_\phi \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \phi} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right\} \vec{u}$$

$$\frac{\partial}{\partial R}\hat{e}_R = \frac{\partial}{\partial R}\hat{e}_\phi = \frac{\partial}{\partial z}\hat{e}_z = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi}\hat{e}_R = \hat{e}_\phi$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi}\hat{e}_\phi = -e_R$$



$$\hat{e}'_R - \hat{e}_R = \delta\phi\, \hat{e}_\phi$$

$$\hat{e}'_\phi - e_\phi = -\delta\phi\, \hat{e}_R$$

Διαχωρισμός επιτάχυνσης

$$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = \left\{\sum_i \vec{u}_{\cancel{s}}\cdot\left[\hat{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right]\right\}\vec{u} = \sum_i (\vec{u}\cdot\hat{e}_i)\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}$$

$\vec{u}$ $\quad\hat{e}_i\quad$ $\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}$

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$$

i-διπλός δείκτης $\sum_i$

$$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = \left(\vec{u}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\right)\hat{e}_i - \vec{u}\times\left(\hat{e}_i\times\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\right)$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}u^2\right)\right]\hat{e}_i - \vec{u}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u})$$

$u^2=\vec{u}\cdot\vec{u}$

$$\vec{a} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}u^2\right) - \vec{u}\times\vec{\zeta}$$

πιτάχυνση ωματιδίου

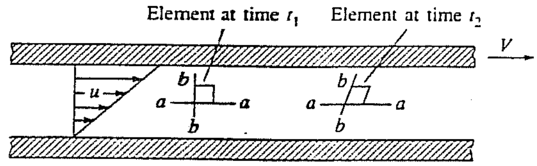
τοπική επιτάχυνση

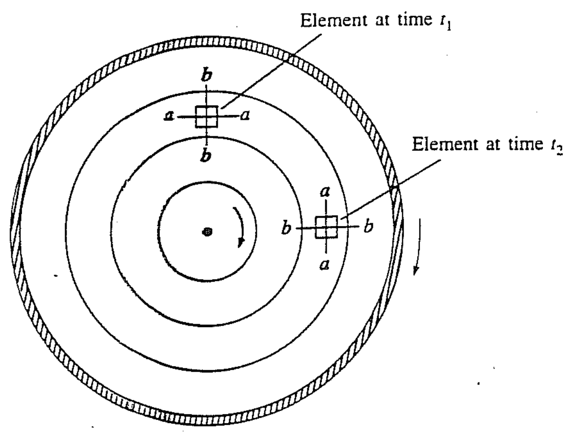
τροχιακή επιτάχυνση

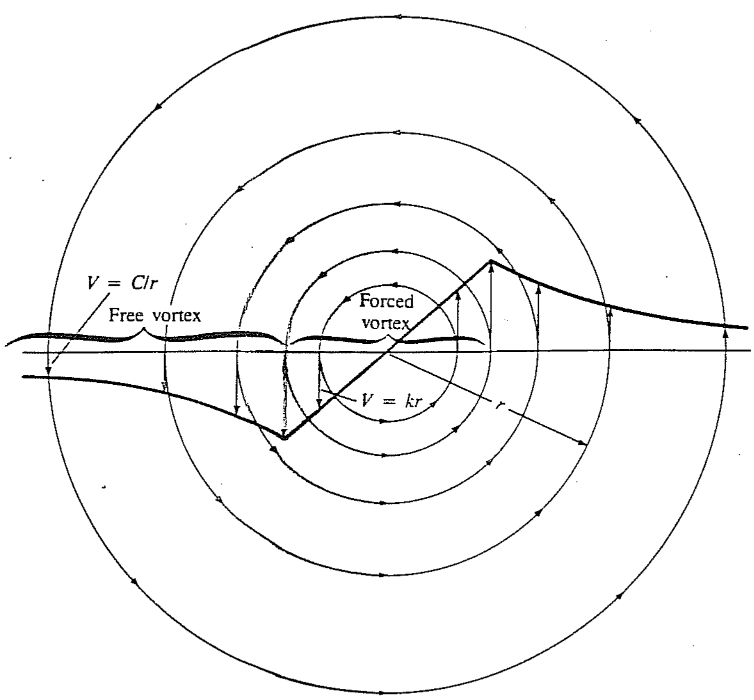
επιτάχυνση περιστροφής (στροβιλισμού)

$$\vec{\zeta} = \vec{\nabla}\times\vec{u}$$

	ταχύτητα	$\vec{\zeta}=\vec{\nabla}\times\vec{u}$	$\vec{\zeta}\times\vec{u}$	$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}u^2\right)$	επιτάχυνση
ευθύγραμμη	$\vec{u}=(u_0,0\,0)$	$-u_0\hat{k}$	$-u_0^2 y\hat{j}$	$u_0^2 y j$	0
ακτινική κυλινδρική	$\vec{u}=\left(\frac{Q}{2\pi r},0,0\right)$	0	0	$-\left(\frac{Q}{2\pi}\right)^2\frac{1}{r^3}\hat{e}_r$	$-\left(\frac{Q}{2\pi}\right)^2\frac{1}{r^3}\hat{e}_r$
περιστροφική κυλινδρική	$u_\phi=\omega_0 r$	$-2\omega_0\hat{e}_z$	$-2\omega_0^2 r\hat{e}_r$	$\omega_0^2 r\hat{e}_r$	$-\omega_0^2 r\hat{e}_r$
Ελεύθερος στρόβιλος	$u_\phi=\frac{K}{r}$	0	0	$K^2\frac{1}{r^3}\hat{e}_r$	$K^2\frac{1}{r^3}\hat{e}_r$


Element at time t_1
Element at time t_2
V
u
b
a
a
b
b
a
a
b


Element at time t_1
Element at time t_2
b
a
a
b
a
b
b
a


$V = C/r$
Free vortex
Forced
vortex
$V = kr$
r

2-D ασυμπίεστη ροή - Συνάρτηση ροής

$$\vec{u} = u(x,y)\,\hat{i} + v(x,y)\,\hat{j}$$

$$\vec{u} = u_r(r,\phi)\,\hat{e}_r + u_\phi(r,\phi)\,\hat{e}_\phi$$

$$\vec{u} = u_r(r,z)\,\hat{e}_r + u_z(r,z)\,\hat{e}_z \quad \text{- αξοσυμμετρική}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

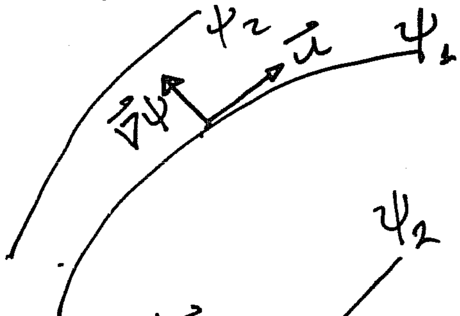
Εισάγουμε $\psi(x,y)$ ώστε

$$u = +\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \Rightarrow$$

$\psi(x,y)$ - βρίσκεται από α) εξίσωση ορμής
β) στροβιλισμό

Φυσικό νόημα $\psi(x,y)$

$\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\psi = 0$ $\quad$ $\vec{u}$ εφαπτομένη της $\psi =$ σταθ



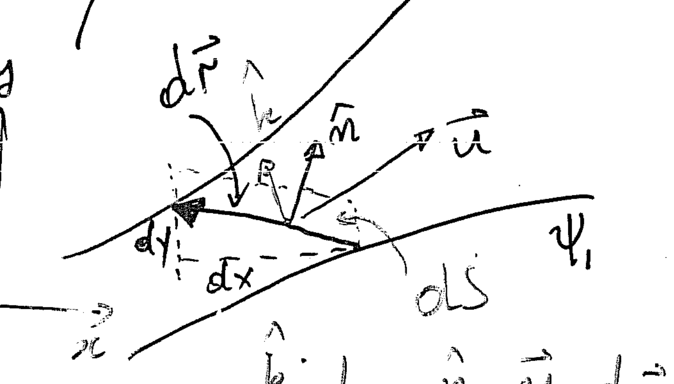
$\Rightarrow \psi =$ σταθ $\Rightarrow$ γραμμή ροής

Ρυθμός ροής όγκου μεταξύ ψ_1 + ψ_2 σε ύψος μονάδα.

$$dQ = \vec{u}\cdot d\vec{S}$$

$$d\vec{S} = dS\,\hat{n} \equiv d\vec{r}\times\hat{k} = +dy\,\hat{i} + d$$

$$dQ = +\frac{\partial \psi}{\partial y}dy + \frac{\partial \psi}{\partial x}dx = \vec{\nabla}\psi\cdot d$$



$\hat{k} \perp \hat{n}, \vec{u}, d\vec{r}$

$= d\Psi$

$$Q = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

Αν $\psi_2 - \psi_1 > 0$ ροή δεξιά

< 0 " αριστερά

Γιά 2-D ροή μόνο ζ_z-συνιστώσα

$$\zeta_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \equiv \nabla_2^2 \psi$$

$$\boxed{\nabla_2^2 \psi = \zeta_z}$$ Εξίσωση Poisson.

ασυμπίεστη + αστρόβιλη $\quad \nabla^2 \phi = 0 \quad$ ή $\quad \nabla^2 \psi = 0$

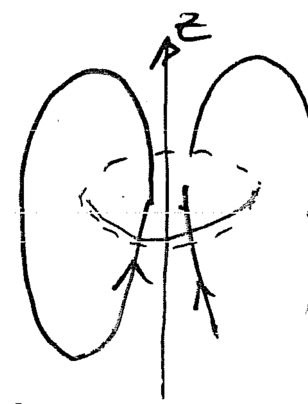
Γιά πολικές συντεταγμένες $\vec{u}(r, \phi)$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \implies \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = 0$$

$$\implies \psi(r, \phi) \implies u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \phi}, \quad u_\phi = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Αξοσυμμετρική ροή $\left(\frac{\partial}{\partial \phi} = 0\right)$ $\quad \vec{u}(R, z) = u_R \hat{e}_R + u_z \hat{z}$

(κυλινδρικές)
(R, ϕ, z)



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R u_R) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

$\psi(R, z)$ $\quad u_R = \frac{1}{R}\frac{\partial \psi}{\partial z} \qquad u_z = \frac{-1}{R}\frac{\partial \psi}{\partial R}$

$\nabla^2 \psi \quad \zeta \quad \frac{\partial u_z}{\partial} \quad \frac{\partial u_R}{} \quad \frac{1}{} \frac{\partial^2 \psi}{}$

Συνάρτηση Ροής (σύνοψη)

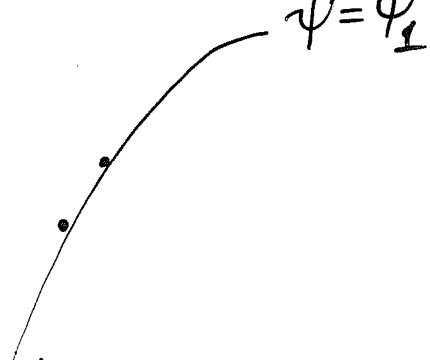
<u>2-D</u> ροή με $\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0$ (ασυμπίεστη)

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0 \Rightarrow \psi(x,y,t) \Rightarrow u_x=\partial\psi/\partial y$$

$$u_y=-\partial\psi/\partial x$$

Γραμμές ροής ⇒ σταθερό ψ

$d\psi=0$ κατά μήκος γραμμής ροής



$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy$$

$$=-u_y\,dx+u_x\,dy$$

$d\psi=0 \Rightarrow \dfrac{u_y}{u_x}=\dfrac{dy}{dx}$ εξίσωση γραμμής ροής

κυλινδρικές συντεταγμένες

$$u_R=\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} \qquad u_\phi=-\frac{\partial\psi}{\partial R}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}=\zeta_z \Rightarrow \nabla_2^2\psi=\zeta_z$$

Πηγή του ψ η ζ_z

Νόμοι διατήρησης σε ένα <u>σύστημα</u>

σωματίδιο → Τοπικοί → Δ.Ε ,

Μακροσκοπικό → μαζικοί → ολοκληρωτικοί

μετατόπιση + περιστροφή + παραμόρφωση

Περιγραφή στόν όγκο συστήματος $V_{sys}(t)$

$$\frac{d}{dt} M_{sys} = 0 \qquad M_{sys} \doteq \int_{V_{sys}(t)} \rho(\vec{r}, t)\, dV$$

$$\frac{d\vec{P}_{sys}}{dt} = \sum \vec{F}_{sys}$$ μακροσκοπικό σύστημα

Γιά στοιχειώδη μάζα

$$\delta m \vec{\alpha} \equiv \vec{F}_{\varepsilon\xi} \leftarrow \left.\begin{matrix} \vec{F}_{\varepsilon\xi} \\ \vec{\alpha} \end{matrix}\right\}$$ εξαρτώνται από $\left\{\begin{matrix} \vec{P}, \vec{u} \\ \vec{u}(\vec{r}, t) \end{matrix}\right.$

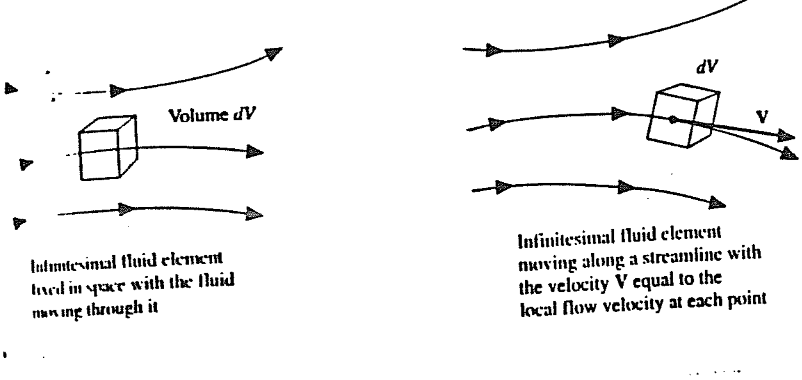
επιτάχυνση

Περιγραφή σέ όγκο ελέγχου

$$\frac{d}{dt} M_{cv}(t) \neq 0 \qquad M_{cv}(t) = \int_{V_{cv}} \rho(\vec{r}, t)\, dV$$

Μικροσκοπική (τοπική)

σύστημα = σωματίδιο

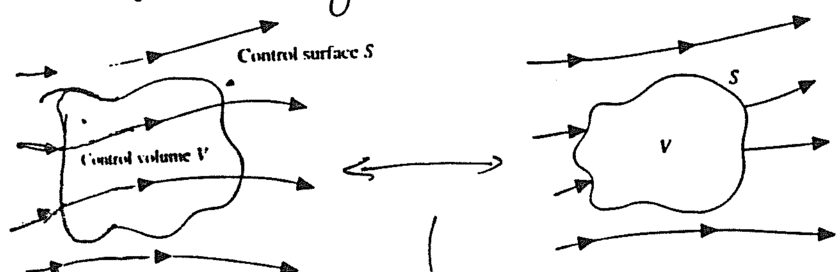


Σχήμα 2.29 Απειροελάχιστο στοιχείο ρευστού (α) σταθερό στο χώρο με το ρευστό να κινείται δια μέσω, και (β) απειροελάχιστο στοιχείο ρευστού που κινείται σε μόνιμη ροή κατά μήκος της γραμμής ροής με ταχύτητα ίση με την τοπική ταχύτητα του ρευστού σε κάθε σημείο $\vec{u}(\vec{r})$.

Σταθερός όγκος ελέγχου   Όγκος συστήματος

$V_{CV} = σταθ$

$M_{CV}(t)$



$V_{sys}(t)$

$M_{sys} = σταθ$

δύο διαφορετικές περιγραφές

Μακροσκοπική

σύστημα = μάζα σταθερή

Σχήμα 2.30 Πεπερασμένος όγκος ελέγχου (α) σταθερός στο χώρο με το ρευστό να κινείται δια μέσω, και (β) Πεπερασμένος όγκος ελέγχου που κινείται παραμορφούμενος, αλλά διατηρώντας τα ίδια σωματίδια ρευστού (σύστημα). Κάθε σωματίδιο έχει διαφορετική ταχύτητα.

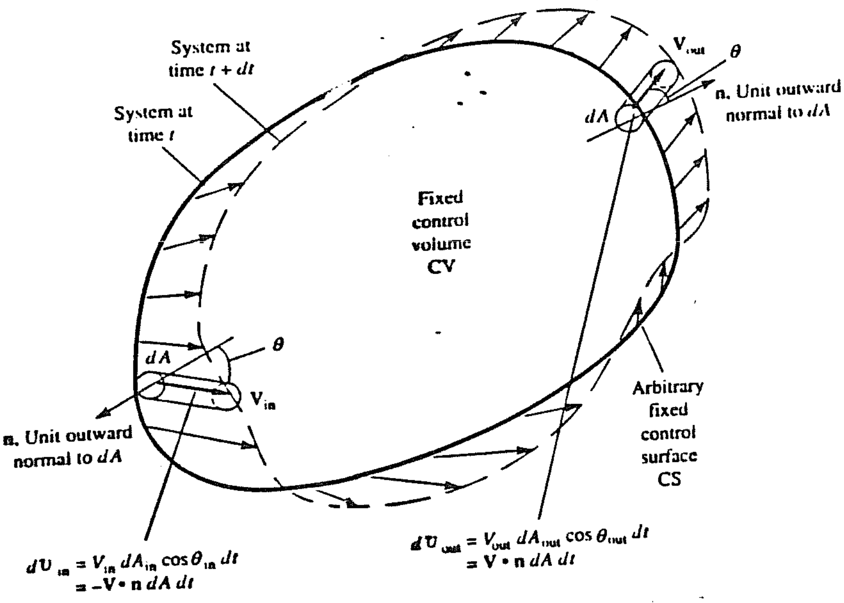
2.10 Νόμοι διατήρησης συστήματος.

Έχοντας ορίσει την έννοια του συστήματος στην υδροδυναμική μπορούμε να γράψουμε τον πρώτο νόμο διατήρησης που αφορά τη μάζα του συστήματος M_{sys}. Παρόλο που ο όγκος του συστήματος παραμορφώνεται, εξ ορισμού διατηρεί σταθερή τη μάζα του με το χρόνο, δηλ.

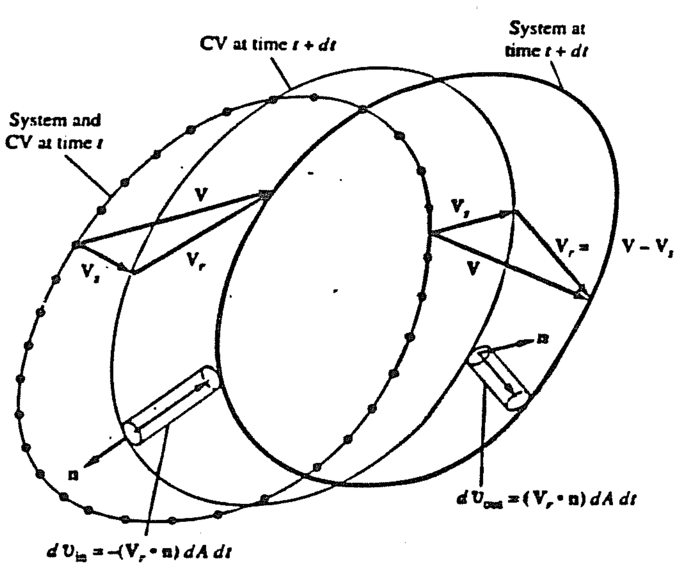
$$\frac{d}{dt}M_{sys} = 0$$

Με τη μάζα του συστήματος μπορούμε να συνδέσουμε και ορμή, στροφορμή και ενέργεια. Για το ρυθμό π.χ. μεταβολής της ορμής του συστήματος $\vec{\mathcal{P}}_{sys}$ έχουμε το αντίστοιχο της

της επιφάνειας.



Σχήμα 2.27 Μετατόπιση και παραμόρφωση ενός συστήματος σε σχέση με το στατικό όγκο ελέγχου. Η επιλογή του όγκου ελέγχου έγινε έτσι ώστε κάποια χρονική στιγμή συμπίπτει με το σύστημα. Τα βέλη μας δίνουν το ρυθμό ροής όγκου μέσω της επιφάνειας του ακίνητου όγκου ελέγχου.



Σχήμα 2.28 Μετατόπιση και παραμόρφωση ενός συστήματος σε σχέση με τόν όγκο ελέγχου που σε κάποια χρονική στιγμή συμπίπτει με το σύστημα αλλά κινείται με ταχύτητα $\vec{u}_c$. Ο ρυθμός ροής όγκου μέσω της επιφάνειας του κινητου όγκου ελέγχου εξαρτάται από τη σχετική ταχύτητα.