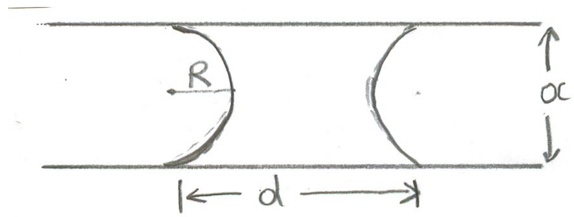


η

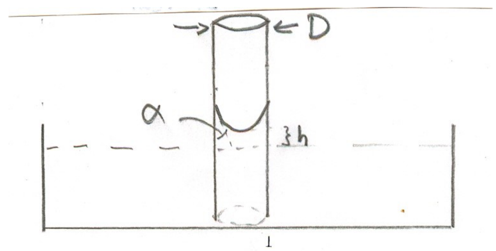
Φιγυρε 1: Σχ. Ασκηση 2

Ασκήσεις

Φ406. Φυσική Συνεχούς Μέσου: Υδροδυναμική- Ασκησεις Α

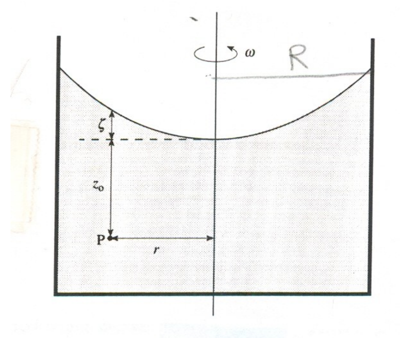
Εαρινό 2011 Ν. Φλυτζανης

1. Σε μία διδιάστατη ροή οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι $u(x, y) = y$ και $v(x, y) = x$.
   - α) Μπορεί το υγρό να είναι ασυμπίεστο· Είναι απαραίτητο να είναι· Είναι αστρόβιλο·
   - β) Δείξτε ότι οι γραμμές ροής είναι ορθογώνιες υπερβολές, δηλ. $x^2 - y^2 =$ σταθερά. Βρείτε την γραμμή ροής μέσω του σημείου (x_0, y_0).
   - γ) Σχεδιάστε τις γραμμές ροής και περιγράψτε την φυσική ροή. Τι συμβαίνει στο σημείο $(x_0 = y_0 = 0)$·
   - δ) Βρείτε την τροχιά του αρχικού (σε χρόνο $t = 0$) σημείου (x_0, y_0). Βρείτε την τροχιά των σημείων που σε χρόνο $t = 0$ ήταν στην θέση $(2, 2)$. Το ίδιο για το σημείο $(2, -2)$. Υπολογείστε για $t > 0$ την ταχύτητα και επιτάχυνση των παραπάνω σωματιδίων.
   - Επαναλάβατε τα (α-γ) για το πεδίο ταχύτητας $u = 2y + 1, \quad v = 4x + 4$.
2. Μία σταγόνα νερου σχηματίζει μία κυκλική κοιλίδα διαμέτρου $d = 2\ cm$ ανάμεσα σε δύο γυάλινες πλάκες, που απέχουν $a = 0.2\ mm$. Ποιά δύναμη απαιτείται για να αυξήσουμε την απόσταση ανάμεσα στις πλάκες· Υποθέστε ότι η ακτίνα καμπυλότητας της επιφάνειας της σταγόνας (κάθετα στις πλάκες) ανάμεσα στις πλάκες είναι $R = 0.1\ mm$. Για το νερό η επιφανειακή τάση ειναι $\sigma = 0.073\ N/m$.
3. Μία σαπουνόφουσκα αποτελείται απο ένα υμένιο πάχους $d = 0.01\ mm$ που μπορεί να συγκρατήσει πίεση $P = 10\ Pa$. Ποιο είναι το μέγιστο δυνατό μέγεθος της φούσκας αν η επιφανειακή ταση στην ενδοεπιφάνεια αέρα-υμενίου είναι $\sigma = 0.08 N/m$· Προσέξτε εδώ έχουμε δύο ενδοεπιφάνειες.
4. Ενας τριχοειδής σωλήνας διαμέτρου D βυθίζεται σε νερό όπως στο σχήμα. Υπολογείστε το ύψος της στήλης του νερού h μέσα στον σωλήνα, αν η γωνία διάβρεξης είναι α. Στη συνέχεια αντικαταστείστε $D = 5mm$ και $\alpha = 35.5^0$.



η

Φιγυρε 2: Ασηση 4



η

Φιγυρε 3: Ασκηση 5

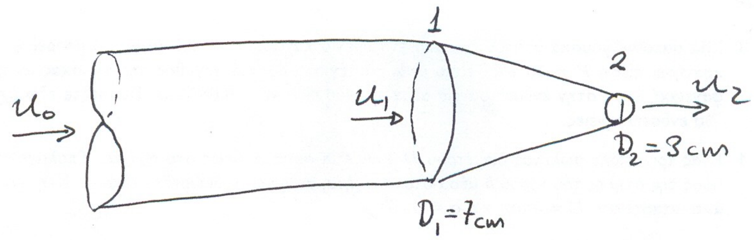
5. Ενα κυλινδρικό δοχείο ακτίνας R περιέχει υγρό και περιστρέφεται μαζι με το υγρό του με σταθερή γωνιακη ταχύτητα ω. γύρω από τον άξονα συμμετρίας του. Δείξτε ότι η επιφάνεια του υγρού έχει την μορφή παραβολοειδούς περιστροφής. Παραλείψτε την επιφανειακή τάση. Γιατί αυτο ειναι δυνατον· Υπολογείστε την πίεση $P(r, z)$ σε κάθε σημείο τού δοχείου. Σε όλη την επιφάνεια η πίεση είναι σταθερή και ίση με την ατμοσφαιρική.

6. Νερό εξέρχεται από σωλήνα (διαμέτρου $D_1 = 7cm$) σε ατμοσφαιρική πίεση $P = 100kPa$.Στο άκρο εκροής η διατομή έχει διάμετρο $D_2 = 3cm$ (δές Σχ.). Η ροή είναι ασυμπίεστη, αστρόβιλη και ανιξωδική με ρυθμό εκροής $Q = 0.0016m^3/sec$.

   - α) Υπολογείστε την ταχύτητα στα σημεία (1) και (2).
   - β) Ποιά είναι η πίεση στο σημείο (1)· του νερού.
   - γ) Ποιά είναι η οριζόντια δύναμη ώστε το λάστιχο να παραμείνει ακίνητο.

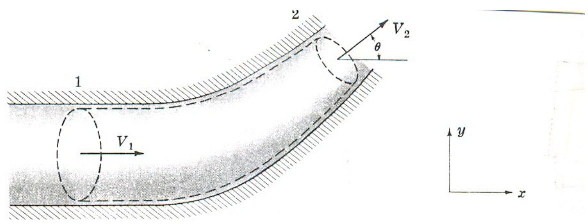
7. Στον καμπυλόγραμμο σωλήνα του σχήματος ρέει σταθερά υγρό υπό την επίδραση της βαρύτητας. Βρείτε την δύναμη που ασκείται στον σωλήνα ανάμεσα στα σημεία 1 και 2.Για την λύση ακολουθείστε τα παρακάτω βήματα:

   - α) Διαλεξτε ένα κατάλληλο όγκο νερού.
   - β) Σχεδιάστε όλες τις εξωτερικές δυνάμεις πού ασκούνται στον όγκο του νερού.
   - γ) Εφαρμόστε την εξίσωση της ορμής.



η

Φιγυρε 4: Ασκηση 6

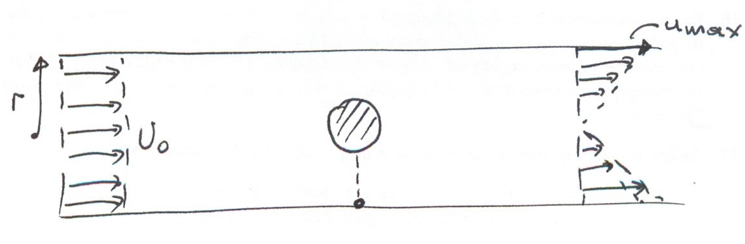


η

Φιγυρε 5: Ασκηση 7

8. Μία μικρή σφαίρα τοποθετείται σε ένα ιδανικό κυλινδρικό αερο-τούνελ ακτίνας $R = 0.5m$. Θεωρείστε την πίεση σταθερή στίς δύο επιφάνειες διατομής (1) και (2) με $P_1 = 200Pa$ και $P_2 = 100Pa$ σε σχέση με την ατμοσφαιρική πίεση. Η ταχύτητα στην είσοδο είναι $u_1 = U_0 = 10m/sec$ με σταθερή κατανομή σε όλη τη διατομή. Η κατανομή της ταχύτητας στο σημείο (2), όπως φαίνεται στο σχήμα, μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση r από τον άξονα, με μηδενική στον άξονα και u_{max} στην κυλινδρική επιφάνεια, δηλ. $u_2 = u_{max}\frac{r}{R}$. $\rho = 1.2kg/m^3$
   - α) Υπολογείστε τον ρυθμό ροής μάζας στο αεροτούνελ.
   - β) Βρείτε την τιμή της u_{max}.
   - γ) Υπολογείστε την ολική οριζόντια δύναμη F που απαιτείται για τη ροή.

9. Από ένα οριζόντιο σωλήνα εξέρχεται νερό με μεγάλη ταχύτητα ($1m/sec$) και διατομή $2cm^2$ και προσπίπτει κάθετα σε λοίο τοίχο. Παραλείψτε την βαρύτητα και χρησιμοποιόντας την ολοκληρωτική εξίσωση ορμής, υπολογείστε την δύναμη που ασκείται στον τοίχο από το εκτοκσευόμενο νερό.



η

Φιγυρε 6: Ασκηση 8.

10. Η υπόθεση του συνεχούς μοντέλλου δέν ισχύει για ροές όπου το χαρακτηριστικό μήκος είναι της ίδιας τάξης με μοριακές αποστάσεις. Δώστε μερικά παραδείγματα τέτοιων ροών.

11. Υπάρχει χαρακτηριστικό μήκος χρόνου κάτω από το οποίο δεν ισχύει η υπόθεση του συνεχούς μοντέλλου. Εκτιμήστε το μέγεθος του χαρακτηριστικού χρόνου.

12. Θεωρείστε την υλική παράγωγο (επιτάχυνση) γιά ένα πεδίο ταχύτητας. Δείξτε ότι είναι αμετάβλητη κάτω από τον μετασχηματισμό Γαλιλαίου $(\vec{r}, t) \rightarrow (\vec{r}', t')$

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{V}t$$

$$t' = t,$$

όπου $\vec{V}$ η σταθερή ταχύτητα μετατόπισης του συστήματος.

13. Θεωρείστε τον μετασχηματισμό του προηγουμένου προβλήματος αλλά τώρα η ταχύτητα του συστήματος $\vec{V}(t)$ είναι χρονικά μεταβαλλόμενη. Δείξτε ότι στό επιταχυνόμενο σύστημα η υλική παράγωγος έχει ένα επιπλέον όρο $-d\vec{V}/dt$, ο οποίος μπορεί να θεωρηθεί σάν ψευδοδύναμη ανά μονάδα μάζας.

14. Σχεδιάστε τις γραμμές ροής για το πεδίο ταχύτητας

$$u = \omega x, \quad v = -\omega y, \quad w = 0,$$

όπου ω είναι μία θετική σταθερά. Σχεδιάστε το διάγραμμα ροής. Η ροή είναι ασυμπίεστη· Είναι αστρόβιλη· Υπολογείστε τη συνάρτηση ροής $\Psi(x, y)$ για τη διδιάστατη ροή σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

15. Υπολογείστε τη συνάρτηση ροής για την παρακάτω αξοσυμμετρική ροή σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$u_r = -\frac{3}{2}U\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)\cos\theta, \quad u_\theta = \frac{3}{2}U\left(1 - 2\frac{r^2}{a^2}\right)\sin\theta, \quad u_\phi = 0,$$

όπου U και a είναι σταθερές και η ροή ισχύει μέσα στη σφαίρα $r \leq a$. Σχεδιάστε το διάγραμμα ροής.

16. Σε μια ασυμπίεστη ροή οι συνιστώσες ταχύτητας είναι $u = a(x^2 - y^2)$, v-άγνωστη , $w = b$, όπου a, b είναι σταθερές. Να βρεθεί η συνιστώσα $v(x, y, z, t)$. Αυτή ορίζεται μονοσήμαντα ή όχι· Αν όχι τί άλλη πληροφορία χρειάζεται·

17. Σε μία μονοδιάστατη ροή με ταχύτητα $u(x, t), v = w = 0$ η πυκνότητα μεταβάλλεται με το χρόνο ως $\rho = \rho_0 - \rho_1 \cos\omega t$, όπου ρ_0, ρ_1 είναι σταθερές και $\rho_1 \ll \rho_0$. Εάν $u(0, t) = 0$ υπολογείστε το πεδίο ταχύτητας. Δώστε την επιτάχυνση σε κάθε σημείο $a(x, t)$. Υπολογείστε την δύναμη ανά μονάδα όγκου, σε χαμηλότερη τάξη ως προς ρ_1, που ασκείται σε ενα ¨σωματίδιο ’ ρευστού.

18. Δείξτε ότι για την παρακάτω διδιάστατη ροή το ρευστό είναι ασυμπίεστο.

$$u = -\frac{\kappa}{2a}\frac{\sinh(2\pi\frac{y}{a})}{\cosh(2\pi\frac{y}{a}) - \cos(2\pi\frac{x}{a})}$$

$$v = \frac{\kappa}{2a}\frac{\sin(2\pi\frac{x}{a})}{\cosh(2\pi\frac{y}{a}) - \cos(2\pi\frac{x}{a})},$$

όπου κ και a είναι σταθερές. Υπολογείστε τη συνάρτηση ροής και σχεδιάστε τις καμπύλες σταθερού Ψ. Δώστε την φυσική εικόνα της ροής.

Απάντηση:

$$\Psi = \frac{\kappa}{4a}\ln\left[\left(\sin(\pi\frac{x}{a})\cosh(\pi\frac{y}{a})\right)^2 + \left(\cos(\pi\frac{x}{a})\sinh(\pi\frac{y}{a})\right)^2\right]$$

19. Η θερμοκρασία της επιφάνειας του νερού σε ένα ποτάμι μετριέται με ένα θερμόμετρο που ταξειδεύει με το νερό με μία ταχύτητα $U = 10km/$ημέρα. Αυτό δείχνει ότι το νερό θερμαίνεται με ρυθμό $0.5^0C/$ημέρα. Την ίδια περίοδο θερμοκρασίες που μετριούνται σε σταθερή θέση δείχνουν μία ελάττωση με ρυθμό 1.4^0C ανά εβδομάδα.

α) Ποιά ειναι η κλίση της θερμοκρασίας κατά μήκος του ποταμού·

β) Είναι το νερό πιο θερμό η πιο κρύο στο πάνω άκρο του ποταμού·

20. Υγρό ρέει ακτινικά πάνω σε επίπεδο απο μία σημειακή πηγή με ακτινική ταχύτητα $u_r = \frac{4}{r^2}\ m/sec$, όπου r είναι η απόσταση από την πηγή. Αν η ροή είναι μόνιμη ποιά είναι η **ολική** επιτάχυνση σε μία απόσταση $0.3m$ απο την αρχή.

21. Σχεδιάστε τις γραμμές ρεύματος για την ροή

$$u = x + y, \qquad v = y + z, \qquad\qquad w = 0.$$

22. Η παρακάτω ροή περιγράφεται με την μορφή *Lagrange* όπου δίνεται η θέση (x, y, z) σε χρόνο t του σωματιδίου που σε χρόνο $t = 0$ ήταν στην θέση (x_0, y_0, z_0).

$x = x_0 e^{-2t/s}$, $y = y_0 e^{t/s}$, και $z = z_0 e^{t/s}$, όπου $t > 0$, $s =$σταθ.> 0

α) Βρείτε την εξίσωση της τροχιάς που περνά από το (x_0, y_0, z_0).

β) Βρείτε την ταχύτητα του υγρού $u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)$ σε συντεταγμένες του *Euler*.

γ) Η ροή είναι μόνιμη·

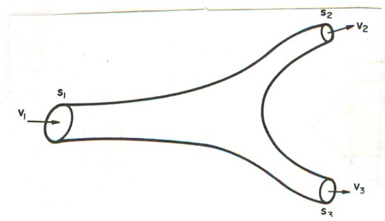
δ) Η ροή ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας για ασυμπίεστο υγρό·

ε) Γράψτε μία γενική εξίσωση για τις γραμμές ρεύματος.

23. Η ροή σε ένα συγκλίνοντα αγωγό με διατομή (δες Σχ.2)μπορεί να θεωρηθεί ως μόνιμη, ασυμπίεστη και διδιάστατη. Μία καλή προσέγγιση για το πεδίο ταχύτητας είναι

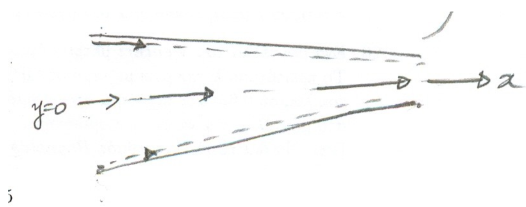
$$\vec{u} = (U_0 + \frac{x}{b})\hat{i} - (\frac{y}{b})\hat{j}$$

όπου U_0 είναι η οριζόντια ταχύτητα στο $x = 0$. Παραλείποντας την ιξωδική επίδραση στα τοιχώματα, βρείτε την επιτάχυνση ενός ρευστού σωματιδίου κατά μήκος της οριζόντιας γραμμής ροής $(y = 0)$.



η

Φιγυρε 7: Ασκηση 22



η

Φιγυρε 8: Ασκηση 23

24. Θεωρείστε σταθερή και ασυμπίεστη μέσω ενός σωλήνα διατομής S_1 με μέση ταχύτητα U_1. Σε κάποιο σημείο ο σωλήνας διαχωρίζεται σε δύο σωλήνες διατομής S_2 και S_3 με μέσες ταχύτητες U_2 και U_3 αντίστοιχα. Αν $S_1 = S_2 = S_3$ ποια είναι η σχέση μεταξύ U_1, U_2 και U_3.

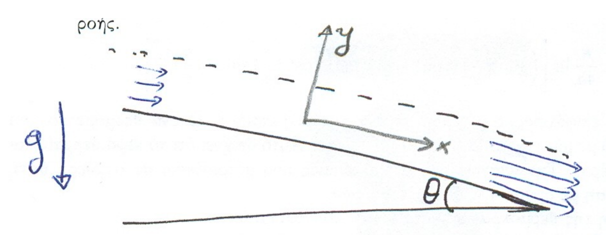
25. Νερό ρέει με σταθερή επιτάχυνση $10m/sec^2$ κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου σε γωνία $\theta = 30^o$ σε σχέση με την οριζόντια. Να βρείτε την βαθμίδα πίεσης κατά μήκος των γραμμών ροής.

26. Θεωρείστε ένα δοχείο σε ρόδες με νερό και σταθερά επιταχυνόμενο με ρυθμό a προς τα κάτω σ' ένα κεκλιμένο επίπεδο με γωνία θ με την οριζόντιο (δες σχήμα). Βρείτε την πίεση στο δοχείο και την μορφή της επιφάνειας σαν συνάρτηση των a και θ.

27. Υπολογείστε την βαθμίδα πίεσης κατά μήκος γραμμής ροής που απαιτείται να επιταχύνει σε οριζόντιο αγωγό με επιτάχυνση $100m/sec^2$. Δίνεται η πυκνότητα του αέρα σε κανονικές συνθήκες, και η σταθερά βαρύτητας.

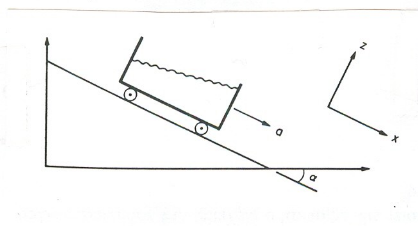
28. Ενα πεδίο ταχύτητας ορίζεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες (R, ϕ, z)ως

$$u_R = \frac{c_1}{R}, \qquad u_\phi = c_2 \cos\phi, \qquad u_z = c_3$$



η

Φιγυρε 9: Ασκηση 24.



ασκ-A11.θπγ

Φιγυρε 10: Ασκηση 29.

όπου $c_1 = 0.02m/sec^2$, $c_2 = 0.03m/sec$, $c_3 = 0.05m/sec$.
Ποιος είναι ο ολικός ρυθμός μεταβολής της πυκνότητας στο σημείο $r = 4m$, $\phi = \pi/4$ και $z = 0$, αν η μέση πυκνότητα του υγρού είναι $35kg/m^3$.

29. Ενα μοντέλλο του $Venturi$ μέτρου έχει γραμμικές διαστάσεις ένα πεμπτο του πρωτότυπου. Το πρωτότυπο λειτουργεί με νερό σε $20^0\ C$ ενώ το μοντέλλο με νερό σε $95^0\ C$. Για διάμετρο του λαιμού $0.6m$ και ταχύτητα στον λαιμό 6 m/sec στο πρωτότυπο, ποια ταχύτητα χρειάζεται στο μοντέλλο για να έχουμε ομοιότητα.
Παρ. Να διατηρηθεί ο αριθμός $Reynolds$ $R = \frac{LU\rho}{\mu}$.

30. Θεωρείστε ένα κομμάτι ενδοεπιφάνειας που αποτελείται από ένα στρώμα με δύο διαφορετικές ακτίνες καμπυλότητας R_1 και R_2 κατα μήκος των ορθογώνιων μηκών ds_1 και ds_2 αντίστοιχα. Και στις δύο κάθετες κατευθύνσεις η καμπύλότητα είναι κύλη. Αν σ είναι η επιφανειακή τάση, δείξτε ότι η διαφορά πίεσης δια μέσου της μεμβράνης στο κέντρο είναι

$$P_1 - P_2 = \sigma(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$$

Τι θα συμβεί αν στην μία κατεύθυνση η καμπυλότητα είναι κυρτή·

31. Αναπτύξτε μία σχέση που συνδέει την δύναμη αντίστασης ενός αντικειμένου μέσα σ' ένα κινούμενο υγρό συναρτήσει όλων των παραμέτρων που είναι σημαντικές (μήκος αντικειμένου (L), ταχύτητα υγρού (U), πυκνότητα υγρού (ρ),και συντελεστής ιξώδους (μ). Η λύση είναι μονοσήμαντη· Ποιό είναι το φυσικό νόημα στην περίπτωση δύο η περισοτέρων λύσεων·

32. Χρησιμοποιόντας την αρχή της διαστατικής ομογένειας, ορίστε τις σχέσεις ανάμεσα στα παρακάτω.
α) την περίοδο ταλάντωσης T ενός επιπλέοντος κυλίνδρου διαμέτρου d σε όρθια θέση, αν η μάζα του κυλίνδρου είναι m και το ειδικό βάρος του υγρου ρg
β) Την εκροή Q (όγκο/χρόνο) ενός υγρού με ιξώδες μ μέσω ενός σωλήνα μήκους L με ομογενή κυκλική διατομή και επιμήκη βαθμίδα πίεσης $\Delta P/\Delta z$.

γ) Την δύναμη αντίστασης F_d σε μία σταγόνα ακτίνας R που πέφτει με ταχύτητα U μέσω αέρα με δυναμικό συντελεστή ιξώδους μ.
δ) Την ταχύτητα επιφανειακών (*capillary*) κυμάτων c μήκους κύματος L στην επιφάνεια ενός υγρού πυκνότητας ρ και επιφανειακής τασης σ.

33. Χρησιμοποιόντας διαστατική ομογένεια, ορίστε την σχέση ανάμεσα στην ταχύτητα των επιφανειακών υγρών κυμάτων μήκους κύματος όταν
α) η βαρύτητα είναι σημαντική.
β) η επιφανειακή τάση είναι σημαντική.

34. α) Ορίστε τον αριθμό *Reynolds* και εξηγείστε το φυσικό του νόημα.
β) Ενας τυπικός μεσο-ωκεάνειος στρόβιλος διαμέτρου $D = 100$ κμ χαρακτηρίζεται από ταχύτητα $0.3\ m/sec$. Καθορίστε αν η ροή είναι στρωτή η τυρβώδης, όταν η διαχωριστική τιμή της σταθεράς του Ρεψνολδς είναι 2.000.

35. Ο αριθμός *Froude* χαρακτηρίζει τον λόγο της δύναμης αδράνειας προς την βαρύτητα. Ενα πλοίο κινείται μεσω περιοχής όπου έχουμε κύματα με μήκος κύματος $100\ m$. Αν η ταχύτητα είναι $5\ m/sec$, βρείτε την τιμή του αριθμού *Froude*.

36. Βρείτε την σχέση διασποράς για επιφανεικα κύματα βαρύτητας. Σχεδιάστε την ταχύτητα φάσης. Εαν έχουμε και επιφανειακή τάση βρείτε με διαστατική ανάλυση το κρίσιμο μήκος κύματος. Ειναι ανω η κάτω όριο; Σχεδιάστε την ταχύτητα ομάδας.

37. Εστω ότι θέλουμε να μετρήσουμε το ιξώδες χρησιμοποιόντας μία
α) Ελεύθερη πίπτουσα σφαίρα
β) δύο οριζόντιες πλάκες που γλυστρούν με σταθερή ταχύτητα
Για τις δύο αυτές περιπτώσεις
(ι) δώστε τις σημαντικές φυσικές ιδιότητες και παραμέτρους.
(ιι) Βρείτε τις αδιάστατες μεταβλητές

38. Σε κάποιο σημείο η ταχύτητα του ανέμου είναι οριζόντια και ίση με $30m/sec$ ενώ η βαθμίδα πίεσης κατά μήκος της γραμμής ροής είναι $\Delta P/\Delta x = 100N/m^3$. Υπολογείστε την ταχύτητα $2m$ πιο πέρα.Δίνεται η πυκνότητα του αέρα $\rho = 1.25kg/m^3$.

39. Θεωρείστε την μονοδιάστατη ροή με ταχύτητα

$$\vec{u} = \alpha \frac{x}{t} \hat{x}$$

όπου α είναι σταθερά.

- α) Υπολογείστε την ¨ολική¨παράγωγο $D\vec{u}/Dt$.
- β) Υπολογείστε την πυκνότητα $\rho(t)$ για ένα στοιχείο ρευστού.
- γ) Βρείτε την τροχιά ενός υγρού σωματιδίου.

- δ) Ερμηνεύστε τα αποτελέσματα (α,β,γ) στις περιπτώσεις $\alpha = 1$ ή 0.

40. Θεωρείστε την διδιάστατη ροή με ταχύτητα

$$u = \alpha y t, \quad v = \alpha x t$$

όπου α είναι σταθερά.

- α)Είναι η ροή ασυμπίεστη·
- β) Είναι η ροή αστρόβιλη· Αν ναί , υπολογείστε το δυναμικό ταχύτητας.
- γ) Υπολογείστε την επιτάχυνση (υλική παράγωγο) ενός ¨σωματιδίου¨.
- δ)

41. Σε μία διδιάστατη μη σταθερή ροή οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι $u = \frac{x}{1+t}$ και $v = \frac{2y}{2+t}$, όπου t είναι ο χρόνος.
α) Βρείτε τις γραμμές ροής. Σχεδίαστε τες για $t = 0$ και $t \to \infty$.
β) Βρείτε την τροχιά που περνά από το (x_0, y_0). Πρέπει να λύσετε

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, t) \quad \frac{dy}{dt} = u(x, y, t)$$

. Συμπίπτει ποτέ με την γραμμή ροής·

42. Σε μία διδιάστατη μη σταθερή ροή οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι $u = t$ και $v = x + 1$, όπου t είναι ο χρόνος.
α) Βρείτε την γραμμή ροής που περνά μέσω του σημείου (x_0, y_0) σε χρόνο t_0.
β) Βρείτε την τροχιά που περνά από το (x_0, y_0). Συμπίπτει ποτέ με την γραμμή ροής·

43. Θεωρείστε τη διδιάστατη ροή με συνιστώσες ταχύτητας

$$u(x, y, t) = -\alpha x + \beta t, \quad v(x, y, t) = \alpha y + \gamma t.$$

Βρείτε το διάγραμμα των γραμμών ροής και περιγράψτε τις αλλαγές με το χρόνο. Βρείτε τις x και y-συνιστώσες των τροχιών.

44. Σχεδιάστε τις γραμμές ροής για το πεδίο ταχύτητας

$$u(x) = \alpha x, \quad v(x) = -\alpha x, w = 0,$$

όπου α είναι θετική σταθερά. Η συγκέντρωση ενός ρύπου στο υγρό είναι

$$c(x, y, t) = b x^2 y e^{-\alpha t},$$

για $y > 0$, όπου β

45. Βρείτε την κυκλοφορία γύρω από τους παρακάτω κυκλικούς στροβίλους και υπολογείστε τον στροβιλισμό:
α) Η εφαπτομενική ταχύτητα μεταβάλλεται σαν $u_\phi = \omega R$, όπου $\omega =$ σταθερά.
β) Η εφαπτομενική ταχύτητα μεταβάλλεται σαν $u_\phi = K/(2\pi R)$, όπου $K =$ σταθερά.
γ) Τι περιμένετε να συμβεί αν υπάρχει ιξώδες·

46. Θεωρείστε το μοντέλλο στροβίλου *Rankine*, όπου ο στροβιλισμός είναι
$\vec{\zeta} = \omega \hat{k}, \qquad r < a, \qquad \omega =$σταθερά
$\vec{\zeta} = 0, \qquad r > a.$

- α) Σε τί διαφέρει από τον ¨ελεύθερο' στρόβιλο·
- β) Βρείτε τη συνάρτηση ροής και το πεδίο ταχύτητας.
- γ) Υπολογείστε την πίεση στο χώρο.
- δ) Σε ποιό όριο μας δίνει τον ελεύθερο στρόβιλο· Ελέγξτε το όριο αυτό.

47. Θεωρείστε μία αξοσυμμετρική ροή $\vec{u} = (u_R(R,z),\ 0,\ u_z(R,z))$ ενός συμπιεστού ρευστού. Η εξίσωση συνέχειας σε κυλινδρικές συντεταγμένες $(R, \phi, z$ είναι

$$\frac{\partial}{\partial R}(\rho R u_R) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho R u_z) = 0$$

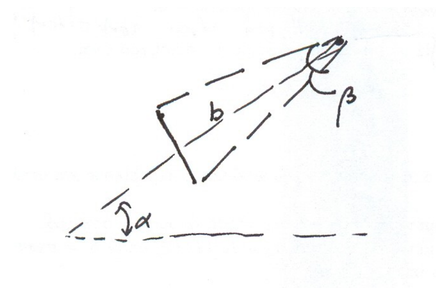
Δείξτε ότι μπορούμε να ορίσουμε μία συνάρτησης ροής ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση συνέχειας.

48. Βρείτε τούς αδιάστατους λόγους των
α) κεντρομόλου δύναμης και της δύναμης ϒοριολις (mfU). Αυτος ο λόγος ονομάζεται αριθμός *Rossby*. ($f = 2\Omega \sin\phi$) είναι η *Coriolis* παράμετρος όπου Ω είναι η γωνιακή ταχύτητα της περιστροφής της γης και ϕ είναι το γεωγραφικό πλάτος.
β) της δύναμης αντίστασης (ιξώδους) προς την δύναμη Αυτός ο λόγος ονομάζεται αριθμός *Eckman*.

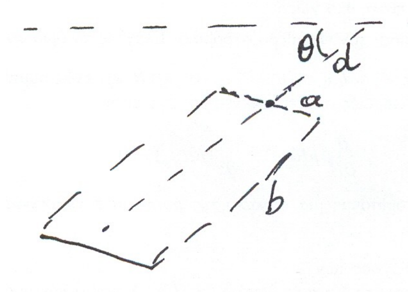
49. Ενα βυθισμένο υποβρύχιο κινείται με 15 m/sec. Ποια πρέπει να είναι η κατάλληλη ταχύτητα σε ένα μοντέλλο 20 φορές μικρότερο:
α) στο νερό·　　　　β) στον αέρα·

50. Στη μελέτη ενός μοντέλλου βρέθηκε ότι και η βαρύτητα και ιξώδη φαινόμενα είναι σημαντικά. Εάν το μοντέλλο λειτουργήσει σε νερό ενώ το πρωτότυπο θα χρησιμοποιηθείστον αέρα και τα δύο σε $20^{0^\frown}$ ποιο είναι το μόνο κατάλληλο χαρακτηριστικό μήκος του μοντέλλου σε σχέση με το πρωτότυπο·

51. Ενα δοχείο παχους w είναι γεμάτο νερό ύψους h . Υπολογείστε την ολική δύναμη που ασκείται στην πλαινή κεκλιμένη πλευρά, σχηματίζοντας γωνία θ με το δάπεδο (δες σχήμα). Βρείτε το σημείο που μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δρα αυτή η δύναμη ώτε να έχουμε ισοδύναμο αποτέλεσμα.



Φιγυρε 11: Ασκηση 50



Φιγυρε 12: Ασκηση 51.

52. Μία τριγωνική πλάκα είναι βυθισμένη σε νερό όπως φαίνεται στο σχήμα. Βρείτε το μέτρο της δύναμης που ασκείται στην πλάκα λόγω της πίεσης του νερου και υπολογείστε την ευθεία δράσης της.

53. Μία ορθογώνια πλάκα διαστάσεων $a \times b$ είναι βυθισμένη σε νερό κεκλυμένη σε γωνία θ με την επιφάνεια όπως φαίνεται στο σχήμα. Βρείτε το μέτρο της δύναμης που ασκείται στην πλάκα λόγω της πίεσης του νερου και υπολογείστε την ευθεία δράσης της.

54. Βρείτε την γενική εξίσωση των γραμμών ρεύματος σε μία διδιάστατη ροή (προσέγγιση κυμάτων)

$$u = u_0, \qquad v = v_0 \cos(kx - \omega t),$$

όπου u_0, v_0, k καί ω είναι σταθερές.
α) Σε χρόνο ποια είναι η εξίσωση της γραμμής ρεύματος που περνά από το σημείο $x = 0, \quad y = 0$·
β) Βρείτε την τροχιά του σωματιδίου που σε χρόνο $t = 0$ είναι στη θέση $x = 0, \quad y = 0$.
γ) Σύντομα συγκρίνετε τις γραμμές ρεύματος και τις τροχιές για τις οριακές περιπτώσεις $\omega = 0$ και $k = 0$.

55. Θεωρείστε τη διδιάστατη μή μόνιμη ροή με συνιστώσες της ταχύτητας σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$u = \frac{1}{(1+t)}, \quad v = 1 \text{ για}, t > -1.$$

- α) Βρείτε και σχεδιάστε τη γραμμή ροής που περνά από το σημείο $(1, 1)$ σε χρόνο $t = 0$.
- β) Βρείτε και σχεδιάστε την τροχιά του σωματιδίου που σε χρόνο $t = 0$ ήταν στο σημείο $(1, 1)$.
- γ) Βρείτε και σχεδιάστε την θέση σε χρόνο $t = 0$ της ινώδους φλέβας που δημιουργήθηκε από χρώμα στο σημείο $(1, 1)$ κατα το χρονικό διάστημα $-1 < t \leq 0$.

56. Δείξτε με απέυθείας υπολογισμούς ότι η διδιάστατη εξίσωση συνέχειας

$$\rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y = 0$$

είναι αμετάβλητη κάτω από την περιστροφή αξόνων

$$x' = x \cos\theta - y \sin\theta$$

$$y' = y \sin\theta + y \cos\theta$$

57. Η πυκνότητα σε καποιο μέρος ορίζεται χρησιμοποιόντας το όριο μικροτέρων κύβων. Δώστε ένα σύντομο επιχείρημα που να υποστηρίζει την αναμονή ότι η πυκνότητα είναι ανεξάρτητητου μεγέθους και σχήματος των κύβων.

58. Υπολογείστε την Ιακοβιανή της ροης

$$x_1 = a_1 e^t, \qquad x_2 = a_2 e^t.$$

Δείξτε ότι $DJ/Dt = (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})J$

59. Γενικεύσατε την απόδειξη του $DJ/Dt = (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})J$ σε τρεις διαστάσεις.
Παρατήρηση: Αντί να γράψετε την τελική 3×3 ορίζουσα, χρησιμοποιείστε το γεγονός ότι η ορίζουσα με δύο ίδιες στήλες είναι μηδέν.

60. Χρησιμοποιείστε τον νόμο του *Stokes* και υπολογείστε την τερματική ταχύτητα U για μια σφαίρα ακτίνας a, πυκνότητας ρ που πέφτει μέσα από ένα υγρό με ιξώδες μ και πυκνότητα ρ_0.

61. Μία σφαιρική σταγόνα νερού ακτίνας $r_0 = 5\ \mu m$, κατέρχεται στον αέρα σε $21^0\ C$. Πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να φτάσει 99% της τελικής ταχύτητας·

62. Βρείτε την ταχύτητα ελεύθερης πτώσης μιας σφαίρας διαμέτρου $D = 20\ cm$, μάζας $15\ kg$ όταν διέρχεται μέσω νερού σε $25^o C$. Αν είχαμε ένα ελλειψοειδές του ίδιου όγκου και μάζας θα περιμένατε μεγαλύτερη ταχύτητα η μικρότερη· Χρειάζεστε επι πλέον στοιχεία·

63. Εστω ότι έχουμε αργή ροή ιξώδους υγρού γύρω από μία σφαίρα. Γράψτε την λύση για το πεδίο ταχύτητας αν ασυμπτωτικά η ροή έχει ταχύτητα U_∞ στην $+x$-κατεύθυνση. Βρείτε την απόσταση από την επιφάνεια της σφαίρας (ακτίνας r_0) στην οποία η ταχύτητα ελαττώνεται στο 90%.

64. Γράψτε την εξίσωση συνέχειας σε κυλινδρικές συντεταγμένες (R, ϕ, z). Χρησιμοποιείστε το κατάλληλο στοιχείο όγκου $R\, dR\, d\cos\phi\, dz$. Οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι u_R, u_ϕ, u_z.

65. Υπολογείστε την $D\vec{u}/Dt$ για την διδιάστατη ροή με πεδίο ταχύτητας $\vec{u} = f(r)\hat{e}_\theta$. Για ποιά μορφή της συνάρτησης $f(r)$ η ροή είναι αστρόβιλη·

66. Γράψτε την εξίσωση συνέχειας για ένα διαστρωμένο υγρό με μεταβλητη πυκνότητα (σφαιρικά συμμετρική) $\rho(r) = k/r$ αλλα μόνιμη $(\partial\rho/\partial t = 0)$ πυκνότητα. Αν γνωρίζετε ότι έχουμε μόνιμη ροή με μόνο ακτινική ταχύτητα και $u_r(r)$ υπολογείστε το πεδίο ταχύτητας. Δίνεται ότι το μέτρο της ταχύτητας σε ακτίνα r_0 είναι u_0. Η ροή είναι αστρόβιλη·

67. Γράψτε την εξίσωση συνέχειας για ένα διαστρωμένο υγρό με μεταβλητη πυκνότητα με κυλινδρική συμμετρία $\rho(R) = k/R$ αλλα μόνιμη $(\partial\rho/\partial t = 0)$ πυκνότητα. Αν γνωρίζετε ότι έχουμε μόνιμη ροή με μόνο ακτινική ταχύτητα και $u_R(R)$ υπολογείστε το πεδίο ταχύτητας. Δίνεται ότι το μέτρο της ταχύτητας σε ακτίνα R_0 είναι u_0. Η ροή είναι αστρόβιλη· Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

68. Δείξτε ότι η ροή που χαρακτηρίζεται από το δυναμικό

$$\Phi = -A\frac{\omega}{k}\frac{cosh[k(d+z)]}{coshkd}\cos(\omega t - kx)$$

α) είναι αστρόβιλη

β) ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας

γ) είναι τέτοια ώστε $\partial\phi/\partial z = 0$ για $z = -d$.

69. Υπολογείστε την $D\vec{u}/Dt$ για την διδιάστατη ροή $\vec{u} = f(r)\hat{e}_\theta$. Για ποιά μορφη της συνάρτησης $f(r)$ η ροή είναι αστρόβιλη·

70. Θεωρείστε ένα ομογενή κυλινδρικό σωλήνα διαμέτρου D, πάχους τοιχωμάτων d και ελαστική μοδυλυς E. Ο συντελεστής ελαστικότητας όγκου είναι K. Θεωρούμε ότι υπο την επίδραση μεταβολής της πίεσης $\partial p/\partial x$, ο σωλήνας είναι ελαστικός και το υγρό συμπιεστό. Δείξτε ότι η εξίσωση συνέχειας δινει

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \left(\frac{1}{K} + \frac{P}{dE}\right)^{-1}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

71. α) Είναι ασυμπίεστη η ροή η οποία δίνεται απο τα παρακάτω δυναμικά ταχύτητας· Αν ναι, βρείτε την αντίστοιχη συνάρτηση ρεύματος $\psi(x, y)$

α1) $\Phi = C(x^2 + y^2)$

α2) $\Phi = C(x^2 - y^2)$

β) Είναι αστρόβιλη η ροή η οποία δίνεται απο τις παρακάτω συναρτήσεις ρεύματος· Αν ναι, βρείτε το αντίστοιχο δυναμικό ταχύτητας

β1) $\Psi = C(x^2 + y^2)$

β2) $\Psi = C(x^2 - y^2)$

Σχεδιάστε τις γραμμές ρεύματος, τις γραμμές $\Psi =$σταθ.. και τις γραμμές σταθερού δυναμικου.

Θεωρείστε τη διδιάστατη ροή με συνιστώσες ταχύτητας

$$u = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad v = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Βρείτε το δυναμικό ταχύτητας και τη συνάρτηση ροής, εφόσον υπάρχουν.

72. Χρησιμοποιόντας την αρχη του *Bernoulli* δείξτε ότι η ταχύτητα του υγρού που εξέρχεται απο μια μικρή οπή σε ένα δοχείο με ελεύθερη επιφάνεια στο πάνω μέρος, είναι η ίδια όπως αυτή που θα αποκτούσε αν το νερό ήταν σε ελεύθερη πτώση απο την επιφάνεια του υγρού μεχρι το ύψος της οπής.

73. Βρείτε πως μεταβάλλεται η σταθερά στον χώρο στην εξίσωση *Bernoulli* για τα παρακάτω δύο πεδία ταχυτήτων
α) $u_\phi = \Omega r$, $u_r = u_z = 0$
β) $u_\phi = \kappa/r$, $u_r = u_z = 0$
όπου Ω και κ είναι σταθερές. Παραλείψτε τη βαρύτητα.

74. α) Δείξτε ότι οι συνθήκες για αστρόβιλη και ασυμπίεστη ροή (με σταθερή ταχύτητα U στο άπειρο) γύρω απο ένα σταθερό κυκλικό κύλινδρο ακτίνας a ικανοποιούνται από ένα δυναμικό ταχύτητας σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$U(r + \frac{a^2}{r})\cos\phi$$

β) Δείξτε ότι το αντίστοιχο δυναμικό εκφρασμένο σε σφαιρικές συντεταγμένες για την ροή γύρω απο μία σφαίρα είναι

$$U(r + \frac{1}{2}\frac{a^3}{r^2})\cos\theta.$$

75. Σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ), το δυναμικό ταχύτητας δίνεται από την σχέση

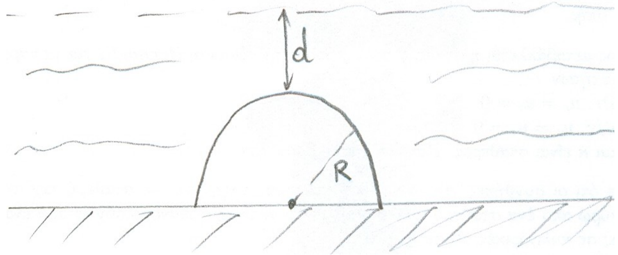
$$\Phi = -kr^2 P_2(\cos\theta) = -\frac{1}{2}kr^2(3\cos^2\theta - 1)$$

που παριστά την αξονικά συμμετρική ροή που δημιουργείται από την υπέρθεση δύο ίσων και αντίθετων ρευμάτων. Σχεδιάστε τις γραμμές ρεύματος σε ένα επίπεδο που περιέχει τον άξονα συμμετρίας
Εάν μία στερεά σφαίρα με ακτίνα $r = a$ τοποθετηθει στην ροή , πως θα μεταβληθεί το δυναμικό ταχύτητας; Υπολογείστε την κατανομή ταχυτήτων και πίεσης στην επιφάνεια της σφαίρας. Αναφέρατε σύντομα σε ποιά σημεία θα διέφερε αυτη η ιδανική ροή απο την ρεαλιστική.

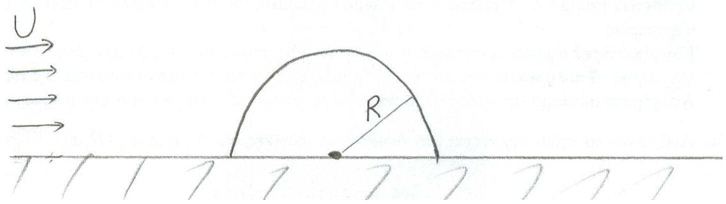
76. Δείξτε ότι το πεδίο ταχύτητας (σε διδιάστατες πολικές συντεταγμένες (R, ϕ))

$$u_R = -U(1 - \frac{a^2}{R^2})\cos\phi$$

$$u_\phi = U(1 + \frac{a^2}{R^2})\sin\phi + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$



Φιγυρε 13: Ασκηση 76.



Φιγυρε 14: Ασκηση 77.

παριστά μία ασυμπίεστη και αστρόβιλη ροή γύρω από ένα κυκλικό κύλινδρο ακτίνας a, με σταθερή ταχύτητα U στο άπειρο και κυκλοφορία Γ γύρω απο τον κύλινδρο. Υπολογείστε την κατανομή πίεσης στην επιφάνεια του κυλίνδρου και δείξτε ότι η άνωση ανά μονάδα μήκους δίνεται από την σχέση $D = -\rho U \Gamma$.

77. Θεωρείστε την ασυμπίεστη και άνευ ιξώδους ροή γύρω από ένα κύλινδρο απείρου μήκους.
    α) Γράψτε την εξίσωση συνέχειας σε κυλινδρικές συντεταγμένες
    β) Βρείτε την εξίσωση για την συνάρτηση ροής Ψ
    γ) Δείξτε ότι $u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$, $u_\theta = \frac{\partial \Psi}{\partial r}$.

78. Στο βυθό της θάλασσας έχουμε κατασκευάσει μία ημισφαιρική κατασκευή για να παρακολουθούμε την κίνηση μεγάλων ψαριών (Δές Σχ. 1).

    - α) Ποιά είναι η κατανομή της πίεσης στην εξωτερική επιφάνεια του ημισφαιρίου·
    - β) Ποια είναι η ολική δύναμη και ροπή που ασκείται στην κατασκευή·

79. Ανεμος σταθερής ταχύτητας U ρέει γύρω (διδιάστατη ροή) από ένα ημικυλινδρικό κτίριο (Σχ.1)

    - Υπολογείστε το πεδίο ταχύτητας αν η ροή είναι αστρόβιλη και ασυμπίεστη.
    - Υπολογείστε την καμπύλη $g(r, \theta) = 0$ πάνω στην οποία η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας (v) είναι σταθερή.
    - Ισχύει η αρχή του *Bernoulli*· Αν ναι υπολογείστε την πίεση στο χώρο και βρείτε το σημείο ελάχιστης και μέγιστης πίεσης.

80. Σε μία διδιάστατη ροή το δυναμικό ταχύτητας είναι

$$\Phi = 4x + 2\ln(R)$$

Σχεδιάστε ποιοτικά το πλέγμα ροής, δηλ. τις καμπύλες σταθερού δυναμικού και σταθερής συνάρτησης ροής.Δώστε τα κύρια χαρακτηριστικά του πεδίου ροής.

81. Διαλέξτε την ισχύ του διπόλου ροής ώστε μαζί με την σταθερή ροή να μας δίνει ροή με ταχύτητα στο άπειρο $10m/sec$ γύρω από ένα κύλινδρο ακτίνας $2m$.

82. Θεωρείστε ένα στρόβιλο ισχύος $K > 0$ και ένα δίπολο ισχύος $\mu > 0$ στην αρχή των αξόνων.

    - Υπολογείστε το δυναμικό ταχύτητας και τη συνάρτηση ροής.
    - Υπολογείστε τις συνιστώσες ταχύτητας σε καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες.
    - Σχεδιάστε τις ισο-ροικές και ισο-δυναμικές καμπύλες.

83. Μία ευθύγραμμη πηγή στο (-1, 0) δίνει $0.7m^2/sec$ ενώ μία καταβόθρα στο σημείο (+2, 0) έχει διπλάσια ισχύ. Εάν η δυναμική πίεση στην αρχή των αξόνων είναι $7.0kPa$ βρείτε την ταχύτητα και δυναμική πίεση στο σημεία (0, 1) και (1, 1). $\rho = 1.24kg/m^3$.

84. Θεωρούμε πάλι το πρόβλημα σταθερής ροής γύρω από πηγή και καταβόθρα (δες παράγραφο ;;;) αλλά τώρα αλλάζουμε τις θέσεις της πηγής και της καταβόθρας. Η πηγή τοποθετείται στη θέση $(a, 0)$ και η καταβόθρα στο $(-a, 0)$. Εχουν την ίδια ισχύ Q και η σταθερή ροή έχει ταχύτητα $U_0 > 0$ παράλληλα στον x-άξονα. Βρείτε τη σχέση ανάμεσα στην εκροή Q το μήκος a και την ταχύτητα U_0 ώστε ρευστό που βγαίνει από την πηγή να μην καταλήγει στην καταβόθρα.

85. Υπολογείστε και σχεδιάστε μερικές γραμμές ρεύματος για την σταθερή ανιξωδική ροή μιας σφαίρας με ταχύτητα U_∞ μέσω ενός ακίνητου υγρού. Προσοχή η ροή είναι σταθερή ως προς τον κινούμενο παρατηρητή.

86. Ενας στρόβιλος είναι ένας σχηματισμός ροής όπου οι γραμμές ροής είναι ομόκεντροι κύκλοι. Βρείτε την συνάρτηση ροής για ένα αστρόβιλο στρόβιλο σε μόνιμη ροή.

87. α) Για μία διδιάστατη ροή ασυμπίεστου ανιξωδικού υγρού γραψτε την εξίσωση συνέχειας.
    β) Ορίστε μία νέα συνάρτηση $u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ και βρείτε την εξίσωση που υπακούει η Ψ, η οποία ονομάζεται συνάρτηση ροής.

88. α) Δείξτε ότι $\phi_0 = \frac{1}{r}$ είναι λύση της εξίσωσης $Laplace$. Περιγράψτε την αντίστοιχη αστρόβιλη ροή.
    β) Δείξτε ότι η

    $$\phi = C\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{r})$$

    είναι επίσης λυση και δώστε την φυσική περιγραφή.
    γ) Το ίδιο για την

    $$\phi = C\frac{\partial}{\partial s}(\frac{1}{r})$$

όπου ds είναι η μετατόπιση σε κάποια κατεύθυνση $\vec{s}$.

δ) Γράψτε το δυναμικό ταχύτητας για μια ροή από μία κατανομή μεγέθους σημειακών πηγών $Q(x, y, z)$.

89. (ι) Δείξτε ότι τα παρακάτω είναι λύσεις της εξίσωσης *Laplace*. Εξηγείστε τί είδους πηγές περιγράφουν τα παρακάτω αστρόβιλα και ανιξωδικά πεδία με δυνάμικο ταχύτητας

α) $\phi = \frac{Q}{r}$

β) $\phi = C\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}$

γ)

$$\phi = C\frac{\partial}{\partial s}(\frac{1}{r})$$

όπου ds είναι η μετατόπιση σε κάποια κατεύθυνση $\vec{s}$.

δ) $\phi = -\frac{Q}{2\pi}\ln R$

ε) $\phi = -k\theta$

στ)$\phi = -Ux - \frac{q}{2\pi}\ln R$

ζ)$\phi = -\frac{q}{2\pi}(\ln R_1 - \ln R_2)$
$R_1 = |\vec{R} - \hat{i}|$ $R_2 = |\vec{R} + \hat{i}|$

δ) Γράψτε το δυναμικό ταχύτητας για μια ροή από μία κατανομή μεγέθους σημειακών πηγών $Q(x, y, z)$. (ιι) Σχεδιάστε προσεγγιστικά τα αντίστοιχα πεδία για τα (α),(δ).

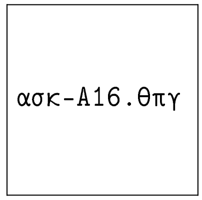
(ιιι) Εξηγείστε για όλα το φυσικό νόημα των διαφόρων σταθερών καθώς και πώς μπορούν να μετρηθούν, αν είναι δυνατόν.

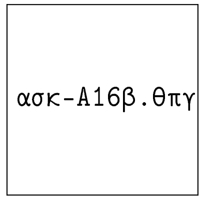
(ιιιι) Βρείτε τα σημεία αποκοπής αν υπάρχουν. Εξηγείστε ποιά η σημασία τους. Για μία απο αυτές τις περιπτώσεις σχεδιάστε το αντίστοιχο πεδίο ταχύτητας.

90. (10 μονάδες) Διατυπώστε και εξηγείστε (χωρίς απόδειξη) το θεώρημα *Kelvin*. Ποιές είναι οι προυποθέσεις για να ισχύει·

91. Στο σωλήνα ροής του σχήματος, η διάμετρος διατομής μεταβάλλεται πολύ ομαλά κατά μήκος του, ώστε να θεωρούμε ότι έχουμε μονοδιάστατη ροή. Χρησιμοποιόντας τον όγκο ελέγχου του σχήματος και γράφοντας την εξίσωση διατήρησης μάζας και ορμής, δώστε τις αντίστοιχες τοπικές διαφορικές εξισώσεις για ανιξωδική ροή.

Σημείωση: Δέν θα αρχίσετε από τίς εξισώσεις *Euler*.





92. Το αμαξίδιο μάζας M του Σχήματος επιταχύνεται προς τα δεξιά με τη βοήθεια του σωλήνα που εκτοξεύει νερό με μεγάλη και σταθερή ταχύτητα U. Το αμαξίδιο είναι ακίνητο αρχικά σε χρόνο $t = 0$. Υποθέστε ότι δέν υπάρχει τριβή σε οποιαδήποτε επαφή αλλά και το ρευστό είναι ανιξωδικό. Επίσης το αμαξίδιο είναι πολύ μεγαλύτερης μάζας απ΄ ότι το νερό που εκτοξεύεται, και η διατομή A του σωλήνα είναι σταθερή σε όλο το μήκος. Βρείτε την ταχύτητα του αμαξιδίου σαν συνάρτηση τού χρόνου με δύο διαφορετικούς τρόπους.

    - Θεωρείστε ένα σταθερό όγκο ελέγχου που περιβάλει το αμαξίδιο.
    - Θεωρείστε ένα όγκο ελέγχου που περιβάλλει το αμαξίδιο και κινείται πρός τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα που συμπίπτει, σε χρόνο t, με τη στιγμιαία ταχύτητα του αμαξιδίου.
    - Το αμαξίδιο έχει τερματική ταχύτητα, και άν ναί, ποιά είναι αυτή·

93. Θεωρείστε την αστρόβιλη και ανιξωδική ροή που δημιουργείται από τη σταθερή ροή με ταχύτητα U γύρω από ένα ευθύγραμμο στρόβιλο με σταθερή κυκλοφορία Γ που είναι τοποθετημένος παράλληλα και σε απόσταση b μπροστά από ένα επίπεδο. Οπως φαίνεται στό σχήμα η σταθερή ροή είναι στην x-κατεύθυνση, ο άξονας του στροβίλου είναι ο z με θετικό στροβιλισμό και η πλάκα έχει κάθετο στο y-άξονα και έχει άπειρη έκταση.

    - Βρείτε το δυναμικό ταχύτητας για τη σύνθετη ροή με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες.
    - Βρείτε τις συνιστώσες της ταχύτητας σε όλο το πάνω ημιεπίπεδο και το μέτρο της ταχύτητας στην επιφάνεια της πλάκας.
    - Υπολογείστε τη συνάρτηση ροής $\Psi(x, y)$ για τη διδιάστατη ροή και σχεδιάστε το διάγραμμα ροής.
    - Βρείτε τις συνθήκες για τις οποίες έχουμε σημείο ηρεμίας στην επιφάνεια της πλάκας.
    - Βρείτε την ολική δύναμη στην πλάκα, εάν δεν έχουμε βαρύτητα.
    - Σχολιάστε πώς διαφέρει η δύναμη ανύψωσης στον στρόβιλο λόγω της ύπαρξης της πλάκας.

ασκ-A17.θπγ

ασκ-A18.θπγ

94. Θεωρείστε μία σημειακή πηγή στον z-άξονα και στο σημείο $z = -b$, και μία σημειακή καταβόθρα στο $z = b$ με ρυθμό ροής $\pm Q$ αντίστοιχα. Βρείτε το δυναμικό ταχύτητας και στη συνέχεια το πεδίο ταχύτητας. Στη συνέχεια θεωρούμε το όριο $b \to \infty$ και $Q \to \infty$ αλλά κρατόντας το λόγο $\frac{Q}{b}$ σταθερό. Βρείτε το όριο του πεδίου ταχύτητας και περιγράψτε το σύντομα.

95. Επαναλάβατε το προηγούμενο πρόβλημα για την περίπτωση δύο ευθύγραμμων πηγών παράλληλα στον z-άξονα και διέρχονται από τα σημεία $x = \pm b$ αντίστοιχα του x-άξονα και έχουν ρυθμό ροής ανά μονάδα μήκους της πηγής $\pm Q_2$.

96. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο δοχείο γεμάτο με ρευστό σε ύψος h όπως φαίνεται στό σχήμα. Γράψτε το σύστημα των εξισώσεων που περιγράφει την ταλάντωση του ρευστού στό δοχείο, όταν αρχικά το διαταράξουμε με μία μικρή απόκλιση από τη θέση ισορροπίας. Δώστε και τις κατάλληλες οριακές συνθήκες, για ανιξωδική και αστρόβιλη ροή. Δείξτε ότι, παραλείποντας την επιφανειακή τάση, οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης στο δοχείο δίνονται από τη σχέση

$$\omega_{mn}^2 = gktanhkh,$$

όπου

$$k^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

Επίσης δώστε και και τη σχέση για τη μετατόπιση της επιφάνειας $\eta_{mn}(x, y, t)$, μέχρι την αυθαίρετη φάση και το πλάτος.

97. Ενας κύλινδρος ακτίνας a περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω σε ιξωδικό ρευστό. Ταυτόχρονα ο κύλινδρος είναι πορώδης στην επιφάνεια και επιτρέπει την ακτινική εισροή με $u_R(a) = U$ για την ακτινική ταχύτητα στην επιφάνεια του κυλίνδρου. Δείξτε ότι

$$u_R = -U\frac{a}{R} \quad \text{για} \quad R \geq a,$$

για την ακτινική ταχύτητα έξω από τον κύλινδρο, και για την εφαπτομενική ταχύτητα

$$R^2\frac{d^2u_\phi}{dR^2} + (Re + 1)R\frac{du_\phi}{dR} + (Re - 1)u_\phi = 0$$

όπου $Re = Ua/\nu$.

Δείξτε ότι για $Re < 2$ υπάρχει μόνο μία λυση της εφαπτομενικής εξίσωσης που ικανοποιεί την οριακή συνθήκη μή ολίσθησης, $u_\phi(a) = 0$, στην επιφάνεια του κυλίνδρου και ταυτόχρονα έχει πεπερασμένη κυκλοφορία $\Gamma(R) = 2\pi R u_\phi(R)$ στό άπειρο. Εάν όμως $Re > 2$, τότε υπάρχουν πολλές λύσεις που ικανοποιούν τους παραπάνω περιορισμούς.

98. Ασυμπίεστο ρευστό γεμίζει το χώρο $0 < y < \infty$ πάνω από το σταθερό επίπεδο $y = 0$ το οποίο ταλαντώνεται μπρός πίσω στην $x-$κατεύθυνση με ταχύτητα $U \cos \omega t$. Δείξτε ότι τό πεδίο ταχύτητας $\vec{u} = [u(y,t), 0, 0]$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

εάν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει εφαρμοσμένη βαθμίδα πίεσης. Δοκιμάστε λύση της μορφής

$$u = Re[f(y)e^{i\omega t}]$$

καί παίρνοντας το πραγματικό μέρος, δείξτε ότι

$$u(y,t) = Ue^{-ky}\cos(ky - \omega t),$$

όπου $\omega = 2\nu k^2$. Σχεδιάστε την ταχύτητα για δεδομένο χρόνο σάν συνάρτηση τής απόστασης από τό επίπεδο.

99. Θεωρείστε μία ευθύγραμμη πηγή κατά μήκος του $z-$άξονα με ισχύ $2m$ καί δύο πηγές με ισχύ $-m$ (δηλ. δύο καταβόθρες) στις θέσεις $x = \pm\delta$ αντίστοιχα και παράλληλες πρός την πρώτη. Θεωρείστε το όριο $\delta \to 0$ με τον περιορισμό ότι

$$\lim_{\delta \to 0} \delta^2 m = \mu_2$$

όπου μ_2 είναι πεπερασμένο. Σχεδιάστε το διάγραμμα ροής. Υπάρχει κλειστή γραμμή ροής που δέν περνά από το κέντρο των αξόνων·

100. Θεωρείστε στο προηγούμενο πρόβλημα ότι οι πηγές είναι σημειακές και κατά μήκος του $z-$άξονα, με ισχύ $2m$ στήν αρχή των αξόνων καί δύο πηγές με ισχύ $-m$ (δηλ. δύο καταβόθρες) στις θέσεις $z = \pm\delta$ αντίστοιχα. Θεωρείστε πάλι το όριο $\delta \to 0$ με τον περιορισμό ότι

$$\lim_{\delta \to 0} \delta^2 m = \mu_2$$

όπου μ_2 είναι πεπερασμένο. Σχεδιάστε το διάγραμμα ροής.

101. Θεωρείστε δύο ευθύγραμμες πηγές κατά μήκος του $z-$άξονα στά σημεία $x = \pm\delta/2$ με ισχύ m αντίστοιχα καί δύο πηγές με ισχύ $-m$ (δηλ. δύο καταβόθρες) στις θέσεις $y = \pm\delta/2$ αντίστοιχα και παράλληλες μεταξύ τους. Θεωρείστε το όριο $\delta \to 0$ με τον περιορισμό ότι

$$\lim_{\delta \to 0} \delta^2 m = \mu_{12}$$

όπου μ_{12} είναι πεπερασμένο. Οι πηγές αυτές σχηματίζουν ένα τετράπολο ροής. Σχεδιάστε το διάγραμμα ροής.

102. Θεωρείστε ότι οι πηγές στο προηγούμενο πρόβλημα είναι σημειακές. Σχεδιάστε το διάγραμμα ροής.

103. Θεωρείστε τέσσερεις σημειακές πηγές στά σημεία $x = \pm\delta/2$ καί $y = \pm\delta/2$ με ισχύ m αντίστοιχα καί δύο πηγές με ισχύ $-2m$ (δηλ. δύο καταβόθρες) στις θέσεις $z = \pm\delta/2$ αντίστοιχα. Θεωρείστε το όριο $\delta \to 0$ με τον περιορισμό ότι

$$\lim_{\delta \to 0} \delta^3 m = \mu_{123}$$

όπου μ_{123} είναι πεπερασμένο. Σχεδιάστε το διάγραμμα ροής.

104. Θεωρείστε μία διδιάστατη ομογενή κατανομή πηγών στήν επιφάνεια ενός δίσκου ακτίνας a με συνολική ισχύ M. Υπολογείστε την κατεύθυνση του πεδίου ταχύτητας στον άξονα συμμετρίας και υπολογείστε το δυναμικό ταχύτητας στον άξονα συμμετρίας. Από το δυναμικό ταχύτητας σχεδιάστε το μέτρο της ταχύτητας στον άξονα συμμετρίας σάν συνάρτηση της απόστασης από το δίσκο.

105. Σε μία διδιάστατη μόνιμη ροή οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι $u = \alpha x$ και $v = -\alpha y$ με α σταθερά.

- α) Βρείτε την εξίσωση για μία γραμμή ροής και σχεδιάστε μερικές.
- β)Σε χρόνο $t = 0$ μαρκάρουμε το ρευστό στην καμπύλη $x^2 + y^2 = a^2$. Η μαρκαρισμένη καμπύλη ρευστού ονομάζεται υλική καμπύλη. Βρείτε την εξίσωση της καμπύλης αυτού του ρευστού για χρόνο $t > 0$.
- γ)Η επιφάνεια στο εσωτερικό αυτής της καμπύλης μεταβάλλεται με το χρόνο, και γιατί·
- δ) Μπορεί το υγρό να είναι ασυμπίεστο· Είναι απαραίτητο να είναι·

106. Επαναλάβατε την προηγούμενη άσκηση για την διδιάστατη διατμητική ροή με συνιστώσες της ταχύτητας $u = \beta y$ και $v = 0$, όπου β είναι σταθερά.

107. Για μία διδιάστατη μόνιμη ροή, οι συνιστώσες της ταχύτητας σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι

$$u = \frac{y-b}{(x-a)^2 + (y-b)^2}, \qquad v = -\frac{x-a}{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

- α) Επιβεβαιώστε ότι $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ και η ροή αντιστοιχεί σε ασυμπίεστο ρευστό.
- β) Βρείτε την συνάρτηση ροής $\Psi(x, y)$.
- γ) Σχεδιάστε τις γραμμές ροής.

108. Για μία διδιάστατη μόνιμη ροή, οι συνιστώσες της ταχύτητας σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$u_R = U\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos phi, , \qquad u_\phi = -U\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin phi.$$

- α) Επιβεβαιώστε ότι $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ και η ροή αντιστοιχεί σε ασυμπίεστο ρευστό.

- β) Βρείτε την συνάρτηση ροής $\Psi(R,\phi)$.
- γ) Σχεδιάστε τις γραμμές ροής.

109. Για μία τρισδιάστατη αξοσυμμετρική ($u_\phi = 0$, $\partial/\partial\phi$) μόνιμη ροή, οι συνιστώσες της ταχύτητας σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι

$$u_R = -\frac{1}{2}\alpha R, \quad u_z = \alpha z.$$

- α) Επιβεβαιώστε ότι $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$ και η ροή αντιστοιχεί σε ασυμπίεστο ρευστό.
- β) Βρείτε την συνάρτηση ροής $\Psi(R,z)$.
- γ) Σχεδιάστε τις γραμμές ροής.

110. Μία αξοσυμμετρική ροή νερού με ταχύτητα 1 m/sec και διατομή 6×10^{-4} m^2 προσπίπτει κάθετα σε γυάλινο τοίχο και εξαπλώνεται πάνω του. Χρησιμοποιόντας την ολοκληρωτική εξίσωση ορμής, υπολογείστε τη δύναμη που ασκείται στον τοίχο λόγω της ροής. Παραλείψτε τη δύναμη της βαρύτητας.

111. Αρχίζοντας από την εξίσωση ορμής του $Euler$ για ένα ρευστό σταθερής πυκνότητας με δύναμη δυναμικού $-\vec{\nabla}\chi$, δείξτε ότι για ένα σταθερό όγκο V που περικλείεται από επιφάνεια A

$$\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}\rho u^2 dV + \int_A H\vec{u}\cdot\vec{n}dA = 0,$$

όπου

$$H = \frac{1}{2}\rho u^2 + P + \chi$$

και ονομάζεται $Bernoulli$ ποσότητα. Περιγράψτε το νόημα της ποσότητας H και το φυσικό νόημα της παραπάνω σχέσης.

112. Ενας περιστρεφόμενος κύλινδρος, ακτίνας $R = 1.0m$ και απείρου μήκους, τοποθετείται σε σταθερή ροή με ταχύτητα $U_0 = 15km/hour$. Ο κύλινδρος περιστρέφεται με $40rpm$ και η πίεση πολύ μακριά απο τον κύλινδρο είναι $10^5 Pa$.

- α) Υπολογείστε και σχεδιάστε την κατανομή πίεσης στην επιφάνεια του κυλίνδρου.
- β) Βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη πίεση στην επιφάνεια του κυλίνδρου.
- γ) Βρείτε τα σημεία (γωνία ϕ) όπου η πίεση στην επιφάνεια του κυλίνδρου είναι ίση με την πίεση στο άπειρο.

113. Δύο περιστρεφόμενοι κυλινδρικοί πύργοι, ύψους $15m$ και διαμέτρου $3m$ χρησιμοποιούνται για την προώθηση ενός πλοίου με τη βοήθεια του ανέμου και το φαινόμενο $Magnus$. Η ταχύτητα του ανέμου είναι $25km/hour$ και οι κύλινδροι περιστρέφονται με 200 περιστροφές ανά λεπτό, ενώ η κατεύθυνση του ανέμου είναι 60^o από την γραμμή του πλοίου.

- α) Εκτιμείστε την ολική δύναμη προώθησης που ασκείται στούς περιστρεφόμενους πύργους, για ιδανική ροή..

ασκ-A18.θπγ

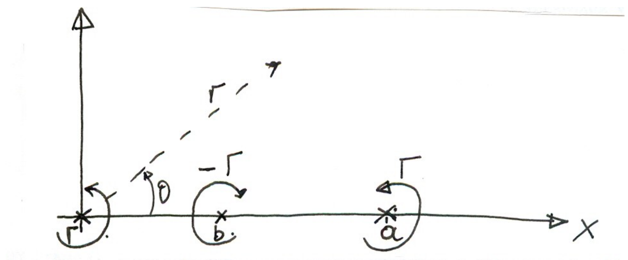
- β) Κάντε το ίδιο για ιξωδική ροή.
- γ) Τί προσανατολισμός της σχετικής ταχύτητας του αέρα θα μας δώσει την μέγιστη δύναμη προώθησης στο πλοίο· Υπολογείστε αυτή τη δύναμη.

114. Για την προώθηση ενός αεροπλάνου χρησιμοποιούμε δύο κυλίνδρους και το φαινόμενο $Magnus$ αντι των πτερυγίων για να έχουμε την απαιτούμενη δύναμη ανύψωσης. Υπολογείστε το μήκος των κυλίνδρων L ώστε να έχουμε τα παρακάτω χαρακτηριστικά και να είμαστε εν πτήσει. Ταχύτητα πτήσης $U_0 = 300km/hour$, ύψος πτήσης $2km$, Μάζα αεροσκάφους $5 \cdot 10^6 kg$, ακτίνα κυλίνδρου $2m$, και γωνιακή ταχύτητα των κυλίνδρων $500rpm$.
Από το ύψος πτήσης υπολογείστε την πυκνότητα του αέρα που μεταβάλλεται με το ύψος.

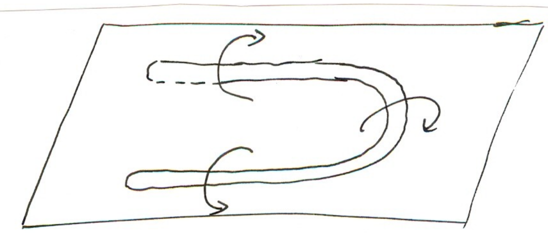
115. Σε μία μελλοντική πόλη στο μέσον της ερήμου σκέφτονται να αρχίσουν με την κατασκευή τριών κυλινδρικών κτιρίων ύψους $30m$ και διαμέρου $D_1 = 5m,\ D_2 = 2m,\ D_3 = 2m$ αντίστοιχα. Ο πύργος 1 τοποθετείται στην αρχή των αξόνων και οι άλλοι δύο συμμετρικά στον y-άξονα στις θέσεις $-2,6$ και $2,6$ αντίστοιχα. Οι κύριοι άνεμοι είναι βόρειοι με ταχύτητα $30m/sec$. $T = 25C,\ P_{atm} = 10^5 Pa$.
    - α) Σχεδιάστε ποιότικά τον χάρτη ροής (ισο-ροικές και ισοδυναμικές γραμμές) και εκτιμείστε τηυν ταχύτητα ανέμου και την πίεση στα σημεία $(-1, 7)$, $(1, 7)$και $0, 3$.
    - β) Που είναι το σημείο μέγιστης ταχύτητας και ελάχιστης πίεσης.
    - γ) Ποιά είναι η μέγιστη ταχύτητα μεταξύ των κυλίνδρων και σε ποιό σημείο·
    - Για τους παραπάνω υπολογισμούς θεωρείστε με ποιές πηγές θα προσεγγίσετε το δυναμικό ταχύτητας.
    - Γράψτε την συνάρτηση ροής και το δυναμικό ταχύτητας.
    - Για πραγματική ροή ποιές είναι οι δυνάμεις αντίστασεις πάνω στους πύργους·

116. Θεωρείστε δύο ελεύθερους και παράλληλους στροβίλους αντίθετης φοράς και ισχύος κ σε απόσταση d μεταξύ τους. Οι δύο στρόβιλοι κινούνται παράλληλα παρασύροντας μαζύ τους περιβάλλον ρευστό, όπως φαίνεται στο Σχ. Το συμπαρασυρόμενο ρευστό ονομάζεται ατμόσφαιρα. Σχεδιάστε τη γραμμή ροής που περιβάλλει την ατμόσφαιρα.

117. Θεωρείστε τώρα ότι οι δύο παράλληλοι στρόβιλοι έχουν κατανεμημένο ομογενώς το στροβιλισμό σέ μία κυκλική επιφάνεια ακτίνας a σε απόσταση των κέντρων τους d με $d/a > 1$. Περιγράψτε τι διαφορές περιμένετε από το προηγούμενο πρόβλημα όταν οι δύο στρόβιλοι είναι αντίθετης φοράς. Τί συμβαίνει άν οι στρόβιλοι είναι της ίδιας φοράς.



Φιγυρε 15: Ασκηση 118



Φιγυρε 16: Ασκηση 120

118. Θεωρείστε N ελεύθερους σημειακούς στροβίλους, οι οποίοι είναι τοποθετημένοι πάνω σέ ένα κύκλο και σε σταθερή απόσταση μεταξύ τους. Αποδείξτε ότι οι στρόβιλοι θα παραμείνουν πάνω στον κύκλο κατά την μετατόπιση. Υπολογείστε την ταχύτητα τους.

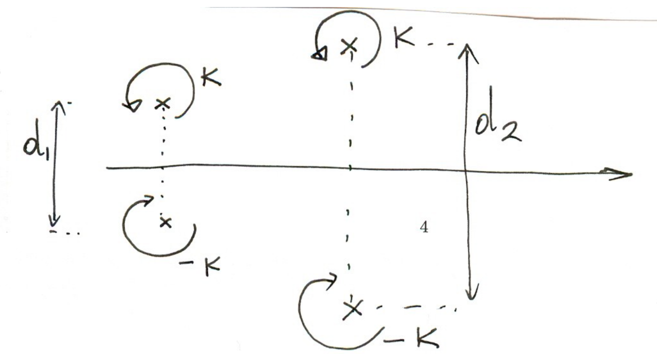
119. Θεωρείστε ένα ζεύγος ελεύθερων στροβίλων με αντίθετη φορά καί ισχύ κ και αρχικά σε απόσταση d. Το ζεύγος πλησιάζει ένα σταθερό τοίχο παράλληλο στό διάνυσμα της μεταξύ τους απόσταση. Υπολογείστε την τροχιά των δύο στροβίλων για ένα ιδανικό ανιξωδικό ρευστό. Τί συμβαίνει άν το ρευστό είναι ιξωδικό· Στή συνέχεια θεωρείστε και την πρόσπτωση υπό γωνία.

120. Θεωρείστε τους τρείς ελεύθερους σημειακούς στροβίλους στά σημεία $(0,0),(b,0),(a,0)$ και $\Gamma,\ -\Gamma,\Gamma$ αντίστοιχα , όπως φαίνεται στό Σχ. ;; Δείξτε ότι για ιδανικό ρευστό η ροή είναι ισοδύναμη με τη ροή ενός σημειακού στροβίλου στο σημείο $(a,0)$ γύρω από ένα κύλινδρο ακτίνας $R=\sqrt{ab}$.

121. Θεωρείστε τίς τροχιές δύο ελεύθερων σημειακών στροβίλων αντίθετης φοράς, αλλά διαφορετικής ισχύος, κ_1 και κ_2 αντίστοιχα. Στη συνέχεια θεωρείστε και την περίπτωση της ίδιας φοράς.

122. Θεωρείστε τον καμπύλο στρόβιλο του σχήματος σε τρισδιάστατη ροή και εκτιμήστε ποιοτικά την κίνησή του. Στη συνέχεια θεωρείστε την περίπτωση πού ο στρόβιλος είναι παράλληλος σε ένα αδιαπέραστο τοίχο και σε απόσταση d από αυτόν. Στη δεύτερη περίπτωση διακρίνετε τίς περιπτώσεις όταν η ροή είναι ανιξωδική και ιξωδική.

123. Θεωρείστε δύο ζεύγη ελεύθερων στροβίλων όπως στο Σχ. ;; όπου στο κάθε ζεύγος οι στρόβιλοι έχουν αντίθετη φορά και απέχουν μεταξύ τους d_1 και d_2 για τά δύο ζεύγη. Ολοι



Φιγυρε 17: Ασκηση 121

έχουν ισχύ κ. Εκτιμείστε την τροχιά για τά δύο ζεύγη για ιδανικό ρευστό. Πείτε άν το αποτέλεσμα αλλάζει άν τοποθετήσουμε ένα τοίχο κάθετο στό μέσο κάθε ζεύγους. Τι αλλάζει στην περίπτωση που έχουμε ιξώδες·

$g = 10m/sec^2$, $\rho = 100kg/m^3$,, μ(νερό) $= 10^{-3}Nsec/m^2$
επιφανειακή τάση $\sigma = 0.073N/m$