Εισαγωγή

Μοντέλλο συνεχούς → Βασικές Αρχές Διατήρησης ← Καταστατικές Σχέσεις

Ιδιότητες ρευσ

$\rho(T,P)$

$\mu\left(T,P,\frac{\vartheta u}{\vartheta z}\right)$

$K(T,P)$

Μάζας → Εξίσωση Συνέχειας

Ορμής → Εξίσωση Ορμής

Ενέργειας → Εξίσωση Ενέργειας

$\vec{q}=-\varkappa \vec{\nabla}$

Ιδιότητες Μετα

Μοντέλλα ροής ← Καταστατικές Σχέσεις

Σταθερός Στοιχειώδης όγκος → Μ.Δ.Ε.

Σταθερός όγκος Ελέγχου → Ολοκληρωτικές Εξισώσεις

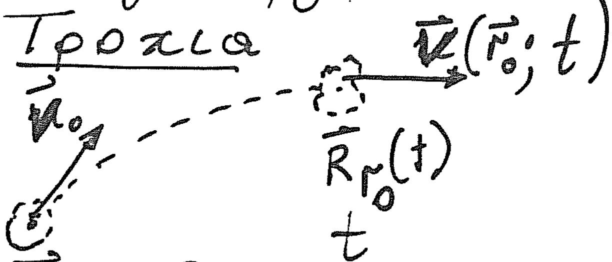
Κινούμενος όγκος Ελέγχου → Ολοκληρωτικές Εξισώσεις

\+ Οριακές Συνθήκες και Αρχικές Συνθήκες ή μόνιμη ροή $\left(\frac{\vartheta}{\vartheta t}=0\right)$

Περιγραφή ροής

Lagrange (σωματίδιο)

Τροχιά



$\vec{r}_0$ ~ δείκτης σωματιδίου

t_0

$$\vec{V}(\vec{r}_0;\delta t) = \frac{\vec{R}(\vec{r}_0,\delta t) - \vec{r}_0}{\delta t}$$

$$\vec{a}(\vec{r}_0,\delta t) = \frac{\vec{V}(\vec{r}_0,\delta t) - \vec{V}(\vec{r}_0,0)}{\delta t}$$

$\vec{F} = \delta m \vec{a}$, $\vec{a}_{r_0} = \frac{d\vec{v}_{r_0}(t)}{dt}$

$\vec{a} = 0$ αν $\vec{V}_{r_0}$ = σταθ.

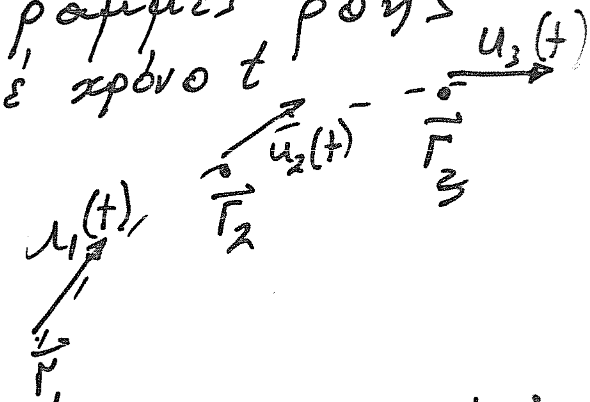
Euler (πεδίο)

$\vec{u}(\vec{r}, t)$

σημείο χώρου

τροχιές σωματιδίων?

Γραμμές ροής σε χρόνο t



εφαπτόμενες στο $\vec{u}$

$$\cancel{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{σωμ} = 0}$$

$\vec{a} = ?$

βαθμωτό $\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$ ~ αύξηση του όγκου

διάνυσμα $\vec{\nabla}\times\vec{u}$ ~ περιστροφή

τανυστή ? παραμόρφωση

Νόμοι Διατήρησης $\Longrightarrow$ Βασικές εξισώσεις Υδροδυναμικής

Διατήρηση Μάζας — Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{dM}{dt}=0 \quad (M=\rho V) \qquad \frac{D\rho}{Dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\rho=-\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$$

Διατήρηση ορμής — Εξίσωση Euler (ιδανικό)

$$\vec{a}=\frac{dP}{dt}=\vec{F} \qquad \rho\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right]=\vec{f}_k \quad \frac{\text{δύναμη}}{\text{όγκο}}$$

Διατήρηση στροφορμής — Εξίσωση στροβιλισμού

Διατήρηση ενέργειας — Εξίσωση ενέργειας

- Νόμοι διατήρησης γράφονται γιά ένα σύστημα μέ τήν ίδια μάζα!!

Στό ρευστό άν M - σταθερή τότε V - παραμορφώνεται

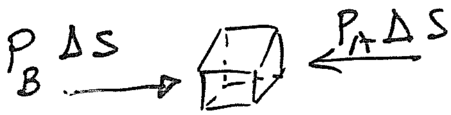
Ανεξάρτητοι της περιγραφής

" τών συστημάτων αναφοράς

Δύναμη Πίεσης

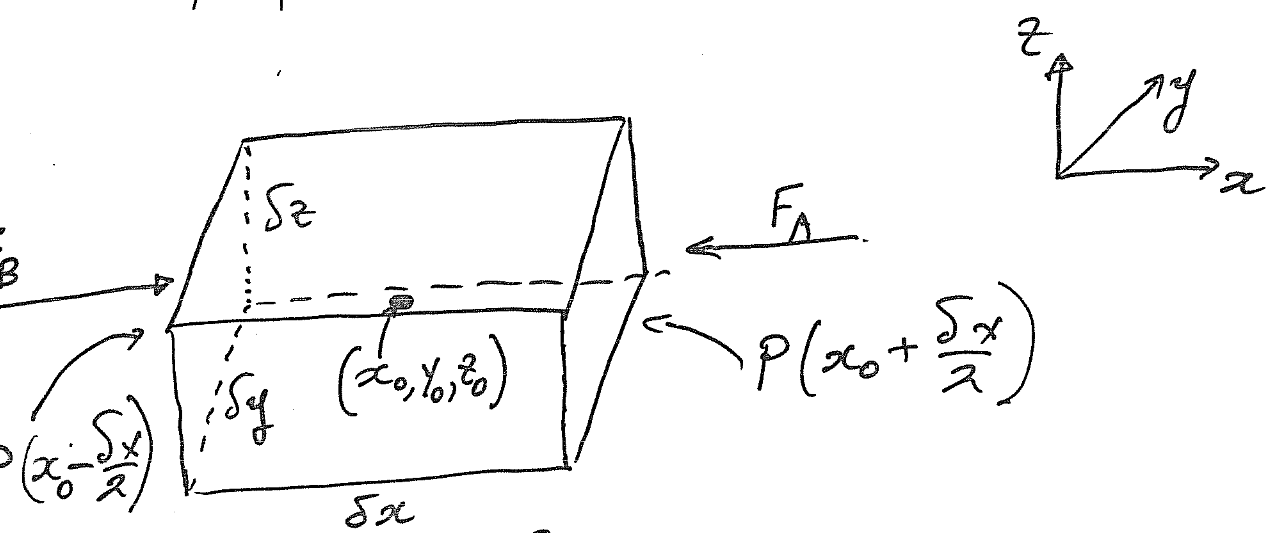
Πίεση ασκείται μέσω επιφανειας.

Ποία είναι η ολική δύναμη σε σωματίδιο ρευστού, π.χ. στοιχειώδη κύβο



$P_B > P_A$ κίνηση $\longrightarrow F = (P_B - P_A)\Delta S = \delta m\, a$

Δύναμη ανά μονάδα μάζας $\Rightarrow$?



$$F_B = P\left(x_0 - \frac{\delta x}{2}\right)\overbrace{\delta y\, \delta z}^{S_B} = \left[P_0 - \frac{\partial P}{\partial x}\Big|_0 \frac{\delta x}{2}\right]\delta y\, \delta z$$

$$F_A = -P\left(x_0 + \frac{\delta x}{2}\right)\overbrace{\delta y\, \delta z}^{S_A} = -\left[P_0 + \frac{\partial P}{\partial x}\Big|_0 \frac{\delta x}{2}\right]\delta y\, \delta z$$

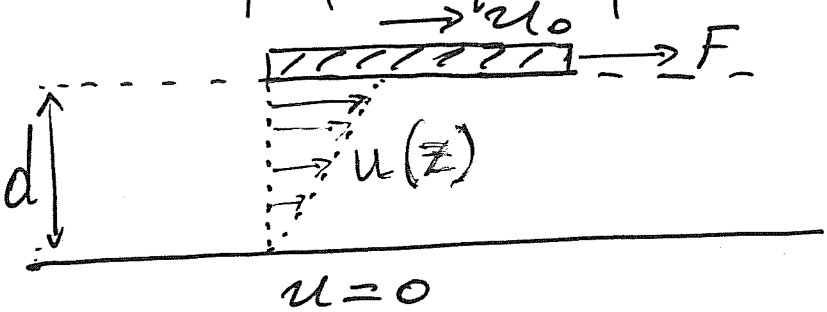
Ολική δύναμη στην x-κατεύθυνση

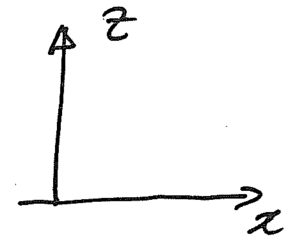
$$F_A + F_B = -\frac{\partial P}{\partial x}\Big|_0 \overbrace{\delta x\, \delta y\, \delta z}^{\delta V} \qquad \delta m = \rho\, \delta V$$

$$f_x \equiv \frac{F_x}{\delta m} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \quad \text{δύναμη ανά μονάδα μάζας}$$

$$\vec{f} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} P(\vec{r})$$

Δύναμη τριβής



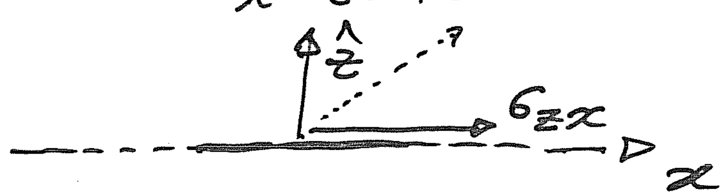


έστω $u(z) = \frac{u_0}{d} z$

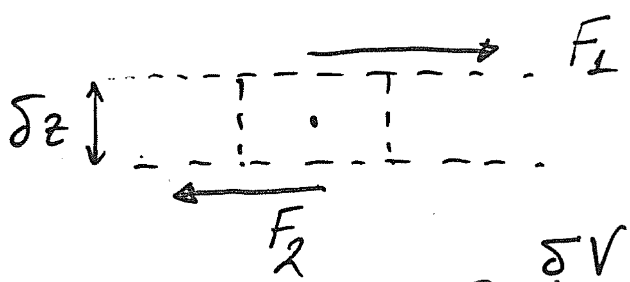
διατμητική τάση   ρυθμός παραμόρφωσης

$$F = \frac{\mu A u_0}{d} \rightarrow \sigma_{zx} \equiv \frac{F}{A} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$$ Νευτώνιο ρευστό.

σ_{zx} – δύναμη / μονάδα επιφανείας στην επιφάνεια με z-κάθετο x-συνιστώσα της δύναμης



Επίδραση διατμητικής τάσης σε σωματίδιο



$$F_1 = \sigma_{zx}\left(z_0 + \frac{dz}{2}\right) \overbrace{\delta x \delta y}^{A}$$

$$F_2 = -\sigma_{zx}\left(z_0 - \frac{dz}{2}\right) \delta x \delta y$$

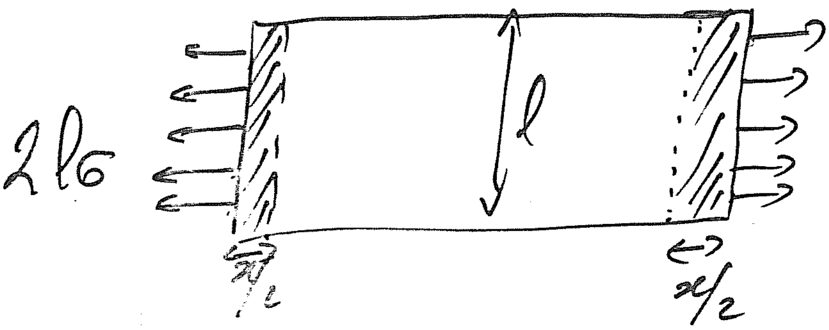
$$F_1 + F_2 = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \overbrace{\delta x \delta y \delta z}^{\delta V}, \quad \delta m = \rho \delta V$$

$$\frac{F}{\delta m} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Δύναμη επιφανειακής τάσης

σ - δύναμη ανά μονάδα μήκους

ή ενέργεια / μονάδα επιφανείας



επιπλέον εμβαδόν

$\Delta E = 2\sigma l x$

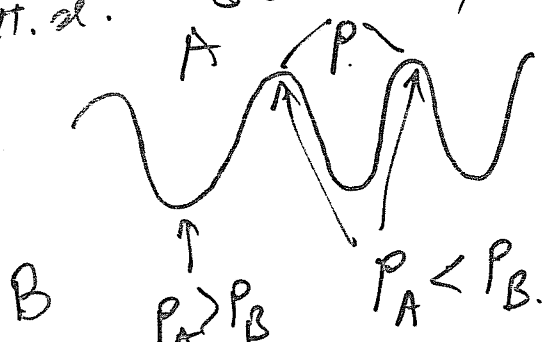
δύο επιφάνειες

$F = 2l\sigma$

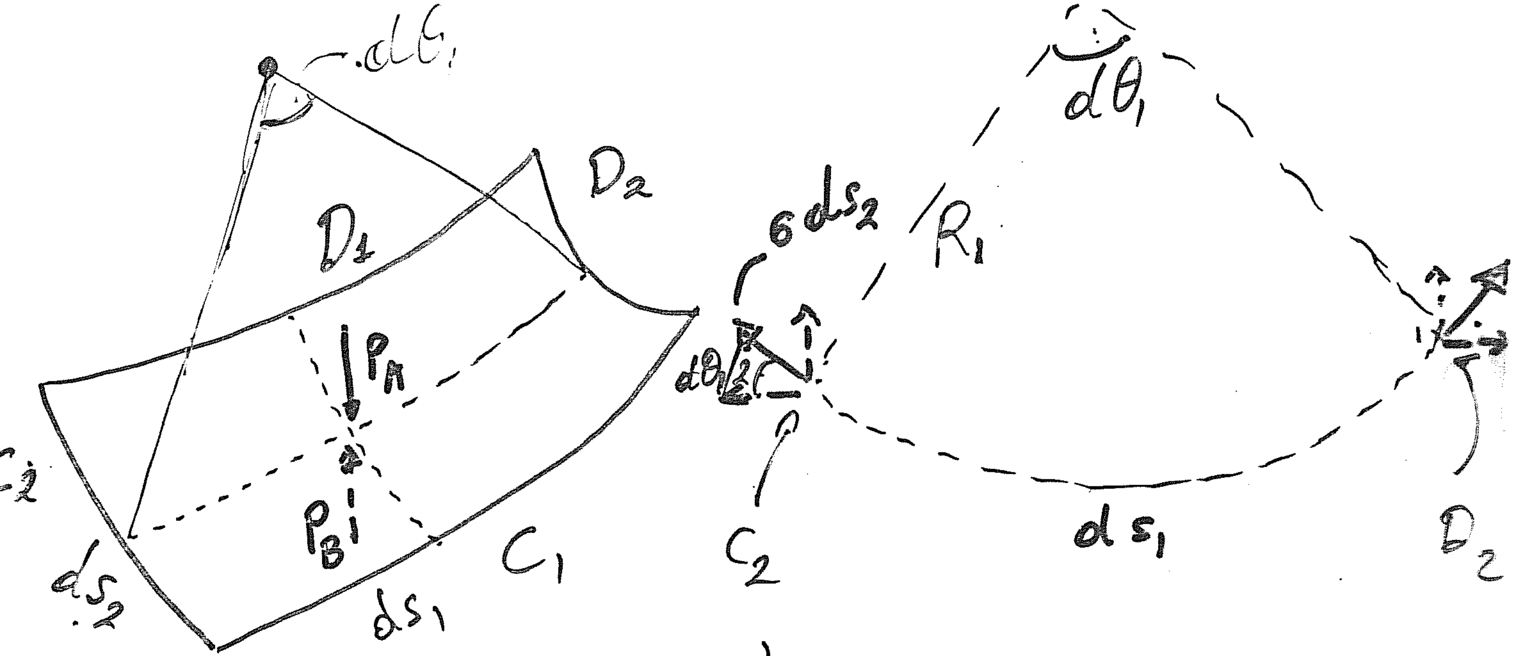
$W = Fx = 2\sigma l x$

Καμπυλότητα υμενίου δημιουργεί διαφορά πίεσης πού δρά σάν δύναμη επαναφοράς σέ κύματα επιφανείας μικρού

π.χ.



Επιπλέον συνεισφέρει καί η βαρύτης



Δυνάμεις στην περιφέρεια

Οριζόντιες συνιστώσες αναιρούνται $\quad \vec{F} = F_{\perp}\hat{z} = (P_A - P_B)\cdot ds_1 ds_2$

Κάθετες προστίθενται

C_2 & D_2 $\quad F_1 = (2\sigma ds_2)\sin\frac{d\theta_1}{2} \quad . \quad d\theta_1 \simeq \frac{ds_1}{R_1}$

C_1 & D_1 $\quad F_2 = (2\sigma ds_1)\sin\frac{d\theta_2}{2} \quad\quad d\theta_2 \simeq \frac{ds_2}{R_2}$

Γιά ισορροπία Διαφορά πίεσης

$P_A > P_B$

$$P_A - P_B = 2\sigma\,\frac{ds_2 \sin\frac{d\theta_1}{2} + ds_1 \sin\frac{d\theta_2}{2}}{ds_1 ds_2}$$

$$\simeq \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

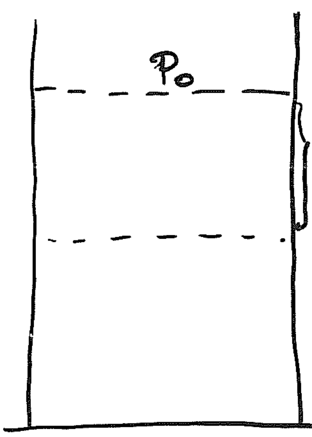
$R_1 = R_2 = R$

$$\boxed{P_A - P_B = \frac{2\sigma}{R}}$$

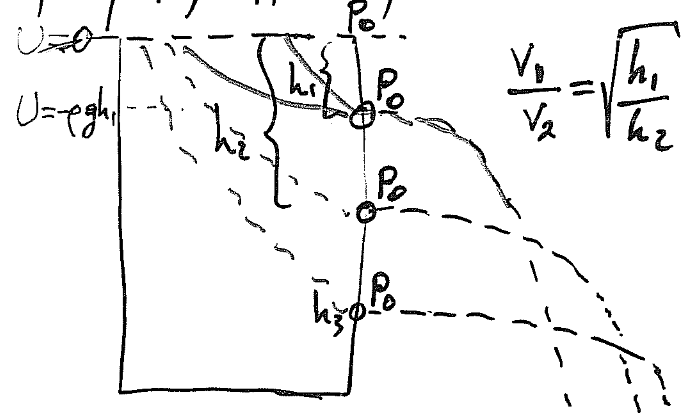
Υδροστατική

Τό ρευστό δέν αντέχει διατμητική τάση (εκτός άν έχει υψηλό ιξώδες)

Ρευστά χωρίς ροή δέν έχουν διατμητικές τάσεις $\Rightarrow$ Μόνο κάθετες δυνάμεις σέ κάθε επιφάνεια (τοίχωμα ή ιστατή) καί ίδια γιά οποιοδήποτε προσανατολισμό



P_0 - ατμοσφαιρική πίεση



$$\cancel{P_0} = \cancel{P_0} - \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho u^2$$

Bernoulli

Εξίσωση ισορροπίας ($\vec{a} = 0$)

$$-\vec{\nabla} P - \underbrace{\rho \vec{\nabla} U}_{\text{βαρύτητα}} = 0 \qquad \frac{\text{δύναμη}}{\text{όγκο}}$$

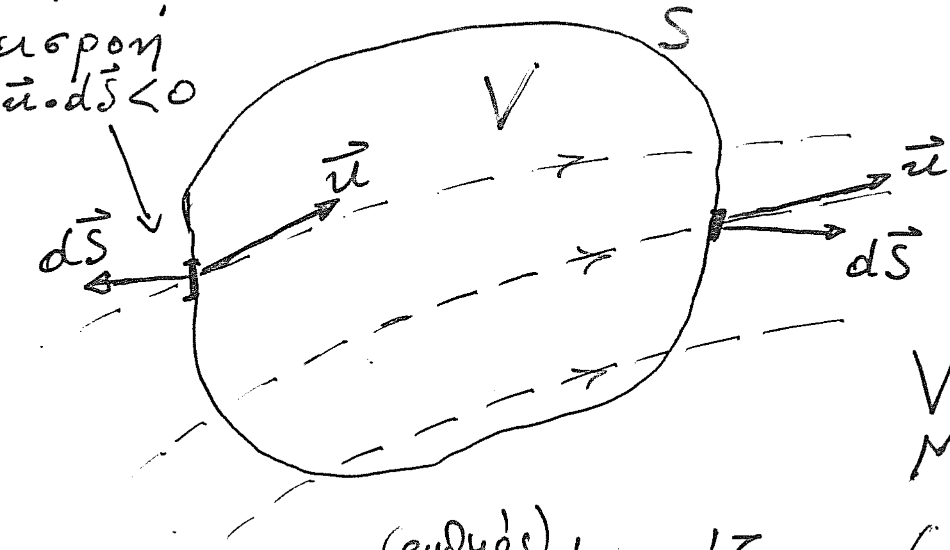
Αν $\rho =$ σταθερά $\qquad P + \rho U =$ σταθερά

Αν $\rho(P)$ έχουμε λύση Βαροτροπικό ρευστό

Αν $\rho(\vec{r})$ δέν έχουμε στάσιμη λύση

$\Rightarrow$ ρεύματα μεταφοράς

Αρχή Διατήρησης Μάζας ⇒ Εξίσωση συνέχειας



εκροή $\vec{u}\cdot d\vec{S}>0$

$d\vec{S}=dS\hat{n}$

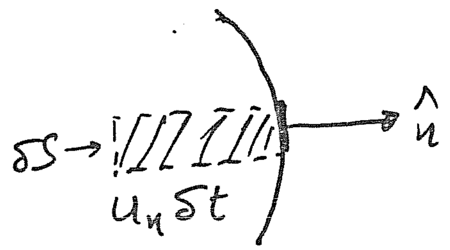
$V=V_{CV}$ - σταθερό

$M_{CV}(t)$

διαφεύγουσα (ρυθμός) ροή μάζας (μάζα/επιφάνεια/χρόνο)

Μόνο $u_n=\vec{u}\cdot\hat{n}$ - δίνει εκροή (ή εισροή)

Σε χρόνο δt ⇒ $\delta m=\rho\delta V=\rho\cdot\underbrace{dS\cdot u_n\delta t}_{\delta V}$



$$\frac{\delta m}{\delta S\,\delta t}=\rho u_n=\rho\vec{u}\cdot\hat{n}$$

Ρυθμός διαφυγής μάζας μέσω επιφάνειας

$$\frac{\delta m}{\delta t}=\rho\vec{u}\cdot\hat{n}\,dS=\rho\vec{u}\cdot d\vec{S}$$

άθροισμα για κάθε dS

Για όλη την επιφάνεια $\oint_S \rho\vec{u}\cdot d\vec{S}$

Εντός V μάζα $M(t)=\int_V \rho\, dV$ - σταθερός όγκος

$$\frac{dM}{dt}=-\oint\rho\vec{u}\cdot d\vec{S}$$ Διατήρηση μάζας

$$\frac{dM_{CV}}{dt}=\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}dV=-\int_V\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u})\,dV$$

ελάχιστο όγκο $\delta V \to 0$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

Εξίσωση συνέχειας

$$\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\rho$$

$\vec{J}_\rho = \rho\vec{u}$ - ρεύμα πυκνότητας

$$\frac{\rho}{t} \equiv \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\rho}_{} = -\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}$$

Ρυθμός μεταβολής πυκνότητας καθώς μάζα κινείται | μεταβολή πυκνότητας λόγω παραμόρφωσης όγκου

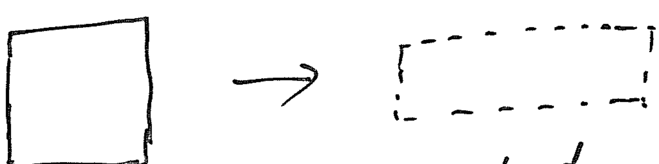
$\rho\vec{u}\cdot d\vec{S}$ - ροή μάζας

$\vec{u}\cdot d\vec{S}$ - ροή όγκου $\quad \oint \vec{u}\cdot d\vec{S} \to \int(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})dV$

$\rho =$ σταθερό $\to$ ασυμπίεστη ροή $\to \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$!

σημαντικός περιορισμός στο πεδίο ταχύτητας

δεν έχουμε μεταβολή όγκου

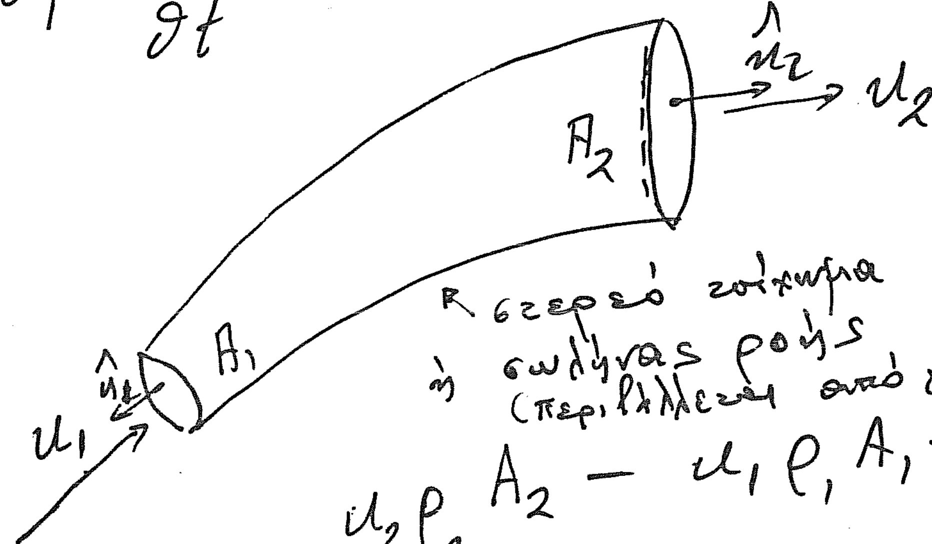


$t=0$ $\quad$ $t=t_1$

Διατήρηση μάζας (Μακροσκοπικός όγκος)

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint \rho \vec{u} \cdot d\vec{S} = 0$$

...όνιμη ...οή $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \oint \rho \vec{u} \cdot d\vec{S} = 0$



κάθετη συνιστώσα

$u_2 = \vec{u} \cdot \hat{n}_2$

στερεό τοίχωμα
ή σωλήνας ροής
(περιβάλλεται από γραμμές ροής)

$$u_2 \rho_2 A_2 - u_1 \rho_1 A_1 = 0$$

Αν $\rho_1 = \rho_2$

$$u_2 A_2 = u_1 A_1$$

στενός σωλήνας $\rightarrow$ μεγάλη ταχύτητα

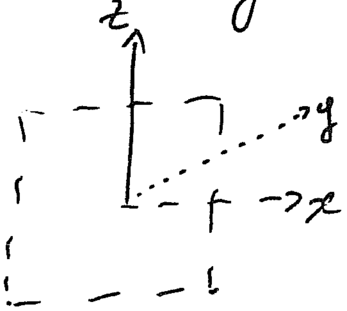
$\Rightarrow$ διατήρηση μάζας

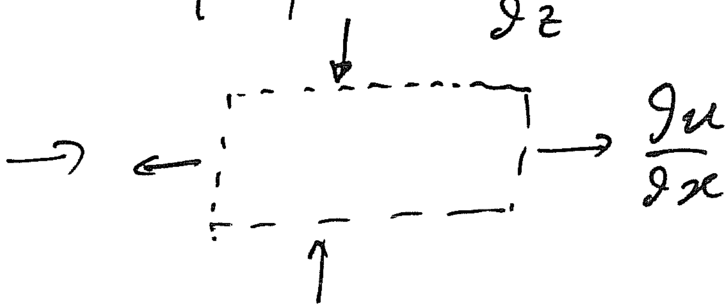
Ασυμπίεστο ρευστό $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$

Δεν έχουμε πηγές (απόκλισης) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

συμπίεση στην z- κίνηση ρευστού προς κέντρο με ρυθμό $-\frac{\partial w}{\partial z}$

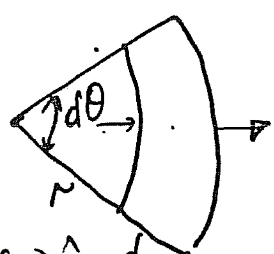




Κυλινδρικές

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \vec{u}\cdot d\vec{S}$$



$\vec{u} = u_r(r)\,\hat{e}_r$

$$\frac{1}{\delta r\, r\, d\theta\, \delta z}\left\{ u_r\, r\, d\theta\, dz\Big|_{r+\delta r} - u_r\, r\, d\theta\, dz\Big|_r \right.$$

$$\simeq \frac{1}{r\,\cancel{\delta r}} \frac{\partial}{\partial r}(r u_r)\,\cancel{\delta r} \Rightarrow u_r \sim \frac{1}{r}$$

Σφαιρικές

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(u_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = 0$$

Συμπιεστότητα

$$K = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P}\Big|_T \qquad \text{ή} \qquad E_b = \frac{1}{K} = -\frac{\Delta P}{\underbrace{\Delta V / V}_{\text{σχετική μεταβολή όγκου}}}$$

E_b: bulk modulus

αύξηση πίεσης ελαττώνει όγκο

Μονάδες $K \sim \frac{1}{P} \rightarrow \frac{1}{Pa}$ $\quad Pa = \frac{N}{m^2} = \frac{kg}{m\,sec^2}$

$$E_b \sim P \rightarrow Pa$$

$E \simeq 10^9\, N/m^2$ $\qquad \frac{\Delta V}{V} \simeq 1\% \Rightarrow \Delta P \simeq 10^7\, Pa$

$\simeq 100\, P_{ατμοσ.}$

Περισσότερα υγρά ασυμπίεστα

Αέρια

ισοθερμική (Τ-σταθερή) $\qquad P = c\rho \qquad E_b = P$

ισο-εντροπική (μηδέν μετάδοση θερμότητας) $\qquad \frac{P}{\rho^{c_p/c_v}} = \text{σταθερά} \;\; \rightarrow \;\; E_b = P\frac{c_p}{c_v}$

Ταχύτητα ήχου

$$c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} \qquad \text{αριθμός Mach} = \frac{u}{c_s}$$