ΦΥΣ. 406 Μηχανική Συνεχών Μέσων

Μερικές διανυσματικές σχέσεις

Για λόγους ευκολίας συμβολισμού είναι πιο πρακτικό να χρησιμοποιούμε στον τρισδιάστατο χώρο αντί των καρτεσιανών συντεταγμένων $(x,\ y,\ z)$ τις $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x,\ y,\ z)$ Εστω $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ καρτεσιανές συντεταγμένες στον τρισδιάστατο χώρο του σημείου $\vec{r}$. Το $\vec{\nabla}$ έχει συνιστώσες $(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$. Εστω f και g βαθμωτές συναρτήσεις των (x_1, x_2, x_3) και έστω $\vec{A}$ και $\vec{B}$ διανυσματικά πεδία με συνιστώσες $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ κτλ.. Τότε ορίζουμε την βαθμίδα του f ως $\vec{\nabla} f$ και απόκλιση και τον στροβιλισμό του $\vec{A}$ ως $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ και $\vec{\nabla} \times \vec{A}$, αντίστοιχα.
Αποδείξτε τις παρακάτω ταυτότητες

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}(fg) &= (\vec{\nabla} f)g + f(\vec{\nabla} g) && (1)\\
\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) &= (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{A} + f(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) && (2)\\
\vec{\nabla} \times (f\vec{A}) &= (\vec{\nabla} f) \times \vec{A} + f(\vec{\nabla} \times \vec{A}) && (3)\\
\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) && (4)\\
\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} && (5)\\
\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) &= 0 && (6)\\
\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= 0 && (7)\\
\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} && (8)
\end{aligned}
$$

Ολοκληρωματικά Θεωρήματα και τάση

Εστω $\Omega \subset R_3$ ένας κλειστός όγκος και $\delta\Omega$ η επιφάνεια που περικλείει τον όγκο Ω. Σας δίνεται το παρακάτω θεώρημα :
Για κάθε συνεχή διαφοροποιήσιμη συνάρτηση f στον Ω, έχουμε

$$\int_\Omega (\partial_{x_i} f) dV = \int_{\delta\Omega} f \hat{n}_i dS \qquad (9)$$

όπου $\hat{n}(\vec{x})$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια $\delta\Omega$ στο σημείο $\vec{x}$.

α. Χρησιμοποιόντας αυτό δείξτε το θεώρημα απόκλισης του *Gauss*, δηλ. για ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{A}$ στον Ω τότε

$$\int_\Omega (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV = \int_{\delta\Omega} \vec{A} \cdot \hat{n} dS \qquad (10)$$

β. Τώρα αποδείξτε το ανάλογο θεώρημα για το διάνυσμα βαθμίδας, αντί για την απόκλιση, δηλ.

$$\int_\Omega (\vec{\nabla} f) dV = \int_{\delta\Omega} f \vec{n} dS \qquad (11)$$

γ. Αναλόγως δείξτε ότι σε ένα συνεχές μέσο υπό την επίδραση τάσης, που δίνεται από $\sigma_{ij}(x)$, αλλά όχι σε δυνάμεις όγκου, η x_j-συνιστώσα F_j της ολικής δύναμης στην περιοχή Ω του μέσου δίνεται από την σχέση

$$F_j = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} (\partial_{x_i} \sigma_{ij}) dV \qquad (12)$$

δ. Επιχειρηματολογείστε ότι η ολική επιφανειακή δύναμη F σε ένα στοιχειώδη όγκο δV και τυχαία μορφή δίνεται από την σχέση

$$F_j = \sum_{i=1}^{3} (\partial_{x_i} \sigma_{ij}) \delta V \qquad (13)$$

ε. Εάν η τάση σε ένα μέσο είναι ομογενής πίεση, τότε ο τανυστής τάσης είναι

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} \tag{14}$$

όπου δ_{ij} είναι το *Kronecker* δέλτα , που δίνεται από την

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \tag{15}$$

Βεβαιωθείτε ότι πράγματι αντιστοιχεί σε ομογενή πίεση. Μετά δείξτε ότι η δύναμη F σε ένα στοιχειώδη μικρό στοιχείο όγκου στον όγκο δV και τυχαίου σχήματος δίνεται από την

$$F = -\vec{\nabla} p\,\delta V. \tag{16}$$