Διαφορικές Διανυσματικές Σχέσεις

1. Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) με μοναδιαία διανύσματα κατεύθυνσης αντίστοιχα $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$, $\hat{e}_z$

   - Διάνυσμα θέσης: $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$
   - Βαθμίδα συνάρτησης $f(x, y, z)$:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z$$

   - Απόκλιση διανύσματος $\vec{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\hat{e}_x + A_y(x, y, z)\hat{e}_y + A_z(x, y, z)\hat{e}_z$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

   - στροβιλισμός διανύσματος $\vec{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\hat{e}_x + A_y(x, y, z)\hat{e}_y + A_z(x, y, z)\hat{e}_z$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{e}_z$$

   - Λαπλασιανή συνάρτησης $f(x, y, z)$:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

2. Κυλινδρικές συντεταγμένες (R, ϕ, z) με μοναδιαία διανύσματα κατεύθυνσης $\hat{e}_R$, $\hat{e}_\phi$, $\hat{e}_z$

   - σχέσεις με καρτεσιανές συντεταγμένες: $x = R\cos\phi$, $y = R\sin\phi$, z το ίδιο
   - διάνυσμα θέσης : $\vec{r} = R\hat{e}_R + z\hat{e}_z$
   - Βαθμίδα συνάρτησης $f(R, \phi, z)$:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial R}\hat{e}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{e}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z$$

   - απόκλιση διανύσματος $\vec{A}(R, \phi, z) = A_R(R, \phi, z)\hat{e}_R + A_\phi(R, \phi, z)\hat{e}_\phi + A_z(R, \phi, z)\hat{e}_z$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RA_R) + \frac{1}{R}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

   - στροβιλισμός διανύσματος $\vec{A}(R, \phi, z) = A_R(R, \phi, z)\hat{e}_R + A_\phi(R, \phi, z)\hat{e}_\phi + A_z(R, \phi, z)\hat{e}_z$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{R}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\hat{e}_R + \left(\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right)\hat{e}_\phi + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial}{\partial R}(RA_\phi) - \frac{\partial A_R}{\partial \phi}\right)\hat{e}_z$$

   - Λαπλασιανή συνάρτησης $f(R, \phi, z)$:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial f}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

3. Σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) με μοναδιαία διανύσματα κατεύθυνσης $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$, $\hat{e}_\phi$

   - Σχέση με καρτεσιανές συντεταγμένες: $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$
   - διάνυσμα θέσης: $\vec{r} = r\hat{e}_r$
   - βαθμίδα συνάρτησης $f(r, \theta, \phi)$:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{e}_\phi$$

- απόκλιση διανύσματος $\vec{A}(r,\theta,\phi) = A_r(r,\theta,\phi)\hat{e}_r + A_\theta(r,\theta,\phi)\hat{e}_\theta + A_\phi(r,\theta,\phi)\hat{e}_\phi$:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

- στροβιλισμός διανύσματος $\vec{A}(r,\theta,\phi) = A_r(r,\theta,\phi)\hat{e}_r + A_\theta(r,\theta,\phi)\hat{e}_\theta + A_\phi(r,\theta,\phi)\hat{e}_\phi$:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{e}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right)\hat{e}_\theta \\ &+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\hat{e}_\phi\end{aligned}$$

- Λαπλασιανή συνάρτησης $f(r,\theta,\phi)$:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$